

π N
2016

Opgaven

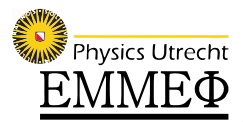
Stichting
Physica



ASML



UNIVERSITY OF AMSTERDAM





Nederlandse Natuurkundige Vereniging

*Tweedejaarsstudenten
kunnen een jaar gratis
lid worden. Alle andere
studenten krijgen een
flinke korting op de
contributie.*

Voordelen van het NNV-lidmaatschap:

- Maandelijks het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde in de bus
- Zeer aantrekkelijke ledenkorting op het jaarlijkse evenement FYSICA
- Optie op gratis lidmaatschap van de NNV-secties
- Toegang tot het complete digitale NTvN-archief
- Subsidie voor studiereizen en symposia van studieverenigingen
- Geassocieerd lidmaatschap van de European Physical Society
- Verbondenheid met de fysische gemeenschap!

Postbus 41882, 1009 DB Amsterdam

T: 020-5922211

E: bureau@nnv.nl

De Nederlandse
Natuurkundige
Vereniging bestaat
al sinds 1921 en is
dé vereniging voor
natuurkundigen
in Nederland. De
NNV is voor alle
fysici: studenten,
fysici werkzaam in
het bedrijfsleven,
onderwijs, academia...
Immers:
Eenmaal fysicus,
altijd fysicus!



Gezicht van de natuurkunde

www.nnv.nl

Voorwoord

Beste deelnemer,

Hier zijn ze dan, de opgaven van PION 2016! Vanuit verschillende universiteiten en onderzoeksgroepen hebben we weer een pittige uitdaging voor jullie. We wensen jullie succes met de volgende 8 vragen.

Hieronder een aantal regels om tijdens het maken van de opgaven in de gaten te houden:

- **Maak iedere opgave op een apart blad!**
- **Lees alle vragen goed door, soms staat er extra informatie verder in de opgave.**
- Schrijf op elk blad dat je inlevert je teamnaam en de naam van de opgave.
- Je hebt drie uur de tijd om de opgaven te maken.
- Er zijn in totaal 90 punten verdeeld over alle opgaven.
- Het is niet toegestaan gebruik te maken van (studie)boeken, aantekeningen, internet, etc. anders dan een BINAS en een woordenboek.
- Het is niet toegestaan (over de opgaven) te communiceren (internet, mobiel, etc.) met anderen dan teamgenoten.
- Het is toegestaan om gebruik te maken van een grafische rekenmachine van het type dat ook is toegestaan tijdens het examen van de middelbare school (Ti-83, Ti-84 of een vergelijkbaar type)
- De aanwezigheid van mobiele telefoons wordt gedoogd, mits deze niet gebruikt worden anders dan voor noodgevallen.
- De winnaar van PION 2016 is het beste team. Door naar PLANCKS gaat het beste Nederlandse bachelorteam, gevolgd door het beste Nederlandse team, ongelijk aan het beste Nederlandse bachelorteam.

In gevallen waar dit reglement niet voorziet, beslist de PION2016 commissie. We wensen je veel succes en vooral veel plezier bij het maken van de opgaven!

Amber van Keecken, Folkert Kuipers, Peter Kristel, Meike Bos, Michel Ram, Dido Denier van der Gon.

PION2016 Commissie

Inhoud

1	Train Problem	4
2	Non-interacting spins	6
3	Bound states at edges	7
4	Low energy photons and gauge invariance	9
5	Shockley-Queisser limiet	11
6	Relativistische velden	13
7	The Amsterdam problem	16
8	Gravitational effects of sea level change	17

11 maart 2016

Succes met de opgaven!

1. Train Problem

E. Pajer
Universiteit Utrecht
11 punten

Consider a train whose many wagons are not separated from each other, forming one single room that is about 200m long. All windows are closed, so no air can enter or leave the train. Since the train is much longer than wide, the problem is essentially one dimensional and all following equations can be simplified accordingly.

Stationary regime: In this part, we try to predict the distribution of the air inside the train as the train leaves or approaches the station. At distances much larger than the mean free path of air particles, air behaves as a fluid¹. In an inertial frame, a fluid obeys the continuity equation (conservation of air)

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \vec{v}) = 0, \quad (1.1)$$

and the Euler equation (Newton's second law)

$$\partial_t \vec{v} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \vec{g}. \quad (1.2)$$

Here, $\rho(x, t)$ is the density of air, $p(x, t)$ the pressure, $\vec{v}(x, t)$ the velocity and \vec{g} the gravitational acceleration due to the earth. To solve the system we also need the equation of state, which we will assume to be given by the ideal fluid formula

$$p = \rho R_{spec} T,$$

with $R_{spec} = 290 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$ the specific gas constant of air, and T the temperature. The presence of the train (and of some passengers) maintains the air at constant temperature $T = 300 \text{ K}$. We approximate the motion of the train as a constant acceleration \vec{a} . Einstein's equivalence principle, which is at the foundation of general relativity, states that any acceleration is locally equivalent to a (linear) gravitational field.

- 1.a)** How do we need to change (1.2) to use it in the non-inertial frame of a train with constant acceleration?
(1 pt)
- 1.b)** First, we look for a stationary solution, i.e. we assume enough time has passed so that the air has reached thermodynamic equilibrium. Compute $\rho_{eq}(x)$ as a function of the position x on the train.
(2 pt)
- 1.c)** If $\bar{\rho}$ is the density averaged over the whole length of the train, and $\delta\rho_{eq}(x) \equiv \rho_{eq}(x) - \bar{\rho}$ the deviation from the average, give an estimate for the maximum of the dimensionless density contrast
(1 pt)

$$\delta_{eq}(x) \equiv \frac{\delta\rho_{eq}(x)}{\bar{\rho}} = \frac{\rho_{eq}(x)}{\bar{\rho}} - 1.$$

¹ Here we will neglect all viscous corrections since air is pretty close to an ideal fluid in the regimes under consideration.

Hint: It is convenient to define the length $L_a \equiv R_{\text{spec}}T/a$.

- 1.d) Feeling the pressure:** As one immerses one's head underwater, pressure on the ear drums starts becoming appreciable to the average human at the depth of about 20cm. (2 pt) What is the minimum acceleration of the train such that a person standing at the rear end of the train feels a pressure on her ears? You might want to use the fact that the pressure at the depth of 10 meters in water is twice the pressure at the surface, which is about 1 bar = 10^5 Pa. Do you expect to be able to feel the increase of pressure in your ears in a typical train? Motivate your estimate of the acceleration of the train.

Since δ is small, the evolution of air with time is well described by the linearised version of the fluid equations. For small, adiabatic perturbations, pressure and density are simply related by

$$\delta p(x, t) \equiv p(x, t) - \bar{p} = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_s \delta \rho(x, t) \equiv c_s^2 \delta \rho(x, t),$$

where the constant c_s^2 is the (adiabatic) speed of sound.

- 1.e)** Use this relation to eliminate the pressure from (1.2). Expand (1.1) and (1.2) to linear (2 pt) order in the small perturbations δ and v around the static and homogeneous solution of a train at rest

$$\rho(x, t) = \bar{\rho} [1 + \delta(x, t)].$$

Combine these two equations (or derivatives thereof) to derive one single equation for δ . Describe in a couple of lines the solutions of the resulting equation.

Hint: You might want to take the gradient of the Euler equation and try to use the continuity equation to eliminate v .

- 1.f) Wave in an accelerating train:** Compute the linearised equations (1.1) and (1.2) (3 pt) around the static but non-homogeneous solution $\rho_{\text{eq}}(x)$ of the train with constant acceleration

$$\rho(x, t) = \rho(x) [1 + \delta(x, t)]$$

Combine the two equations to obtain one single second order partial differential equation for δ .

Hint: It will have the same two terms as in the previous case, plus a new one, which should vanish for $a \rightarrow 0$.

To find the general solutions use separation of variables $\delta(t, x) = f(t)g(x)$, and solve the two resulting ordinary differential equations. What is particular about the amplitude of the wave in this class of solutions?

Useful numerical values:

$$L = 200\text{m}, \quad T = 300 \text{ K} = 27^\circ\text{C}, \quad R_{\text{spec}} = 290 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}.$$

2. Non-interacting spins

L.C. Filion
Universiteit Utrecht
12 punten

Consider a system consisting of N non-interacting spins in an external field H at temperature T . The Hamiltonian for this system can be written

$$\mathcal{H} = -H \sum_{i=1}^N S_i,$$

where $S_i = \pm 1$ is the state of spin i .

2.a) What is the partition function $Q_1(H, T)$ of a single spin? Calculate the probabilities p_+ and p_- for the spin up ($S = 1$) and spin down ($S = -1$) states.
(1 pt)

2.b) What is the average number of up spins $\langle N_+ \rangle$ and down spins $\langle N_- \rangle$? What is the average energy $\langle E \rangle$?
(2 pt)

2.c) Write down the partition function $Q(N, N_+, H, T)$ where the total number of up spins N_+ , total number of spins N , field H , and temperature T are fixed. Show that the associated free energy can be written as:

$$\frac{F(N, N_+, H, T)}{k_B T} = N_+ \log \frac{N_+}{N} + (N - N_+) \log \frac{N - N_+}{N} + \beta H (N - 2N_+).$$

2.d) Let $m = p_+ - p_-$. Show that the entropy per spin can be written as:
(2 pt)

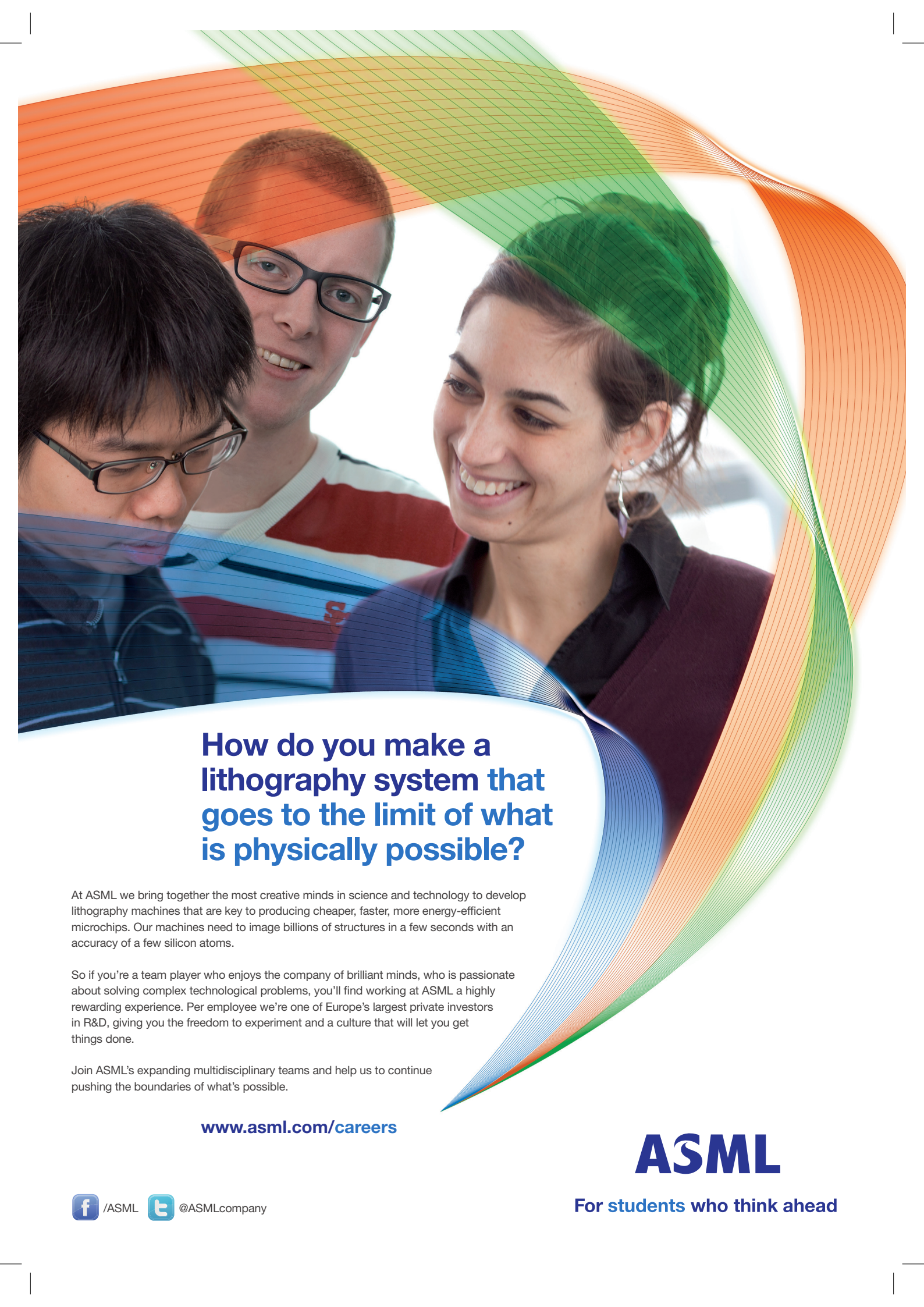
$$\frac{S}{N} = -k_B \left(\frac{1+m}{2} \log \frac{1+m}{2} + \frac{1-m}{2} \log \frac{1-m}{2} \right),$$

where k_B is Boltzmann's constant.

2.e) Express the average energy $\langle E \rangle$ of the spin-system in terms of m .
(1 pt)

2.f) Use your results from (d) and (e) to determine the temperature T . Show that the temperature is negative for negative m . You may assume that H is positive.
(2 pt)

2.g) Consider a system consisting of two subsystems, with temperatures $T_1 < 0$ and $T_2 > 0$. Calculate the change in total entropy for the transfer of an infinitesimal amount of energy δ from subsystem 1 to subsystem 2. Is this what you would expect? Explain in a sentence or two.
(2 pt)

A photograph of three people (two men and one woman) looking at a screen. The image is overlaid with large, colorful, abstract lines in shades of orange, green, and blue that curve across the top and right sides of the page.

How do you make a lithography system that goes to the limit of what is physically possible?

At ASML we bring together the most creative minds in science and technology to develop lithography machines that are key to producing cheaper, faster, more energy-efficient microchips. Our machines need to image billions of structures in a few seconds with an accuracy of a few silicon atoms.

So if you're a team player who enjoys the company of brilliant minds, who is passionate about solving complex technological problems, you'll find working at ASML a highly rewarding experience. Per employee we're one of Europe's largest private investors in R&D, giving you the freedom to experiment and a culture that will let you get things done.

Join ASML's expanding multidisciplinary teams and help us to continue pushing the boundaries of what's possible.

www.asml.com/careers

ASML

For students who think ahead

 /ASML  @ASMLcompany

3. Bound states at edges

L. Fritz
Universiteit Utrecht
11 punten

We consider a specific tight binding model of electrons hopping on a square lattice, where on each lattice site there are two orbital states. Assuming periodic boundary conditions in two directions the Bloch Hamiltonian can be written as

$$H(k_x, k_y) = \begin{pmatrix} -2 - \cos k_x - \cos k_y + m & -\sin k_x + i \sin k_y \\ -\sin k_x - i \sin k_y & 2 + \cos k_x + \cos k_y - m \end{pmatrix}$$

3.a) What is the dispersion relation of this problem?
(2 pt)

For $m \neq 0$ this describes a system with an excitation gap, which is at $(k_x, k_y) = (\pm\pi, \pm\pi)$ and $(k_x, k_y) = (\pm\pi, \mp\pi)$.

3.b) In the vicinity of one of these points an effective two dimensional Dirac theory emerges from Bloch Hamiltonian. Show that in real space it is given by
(1 pt)

$$H = \begin{pmatrix} m & -iv_F \hbar \partial_x - v_F \hbar \partial_y \\ -iv_F \hbar \partial_x + v_F \hbar \partial_y & -m \end{pmatrix}$$

3.c) Show that the low energy spectrum does not depend on the sign of the mass term m .
(1 pt)

3.d) Now we assume that the system is still translationally invariant in y-direction, but translational invariance in x-direction is broken by a mass term $m(x, y) = m(x)$, meaning the Hamiltonian is given by

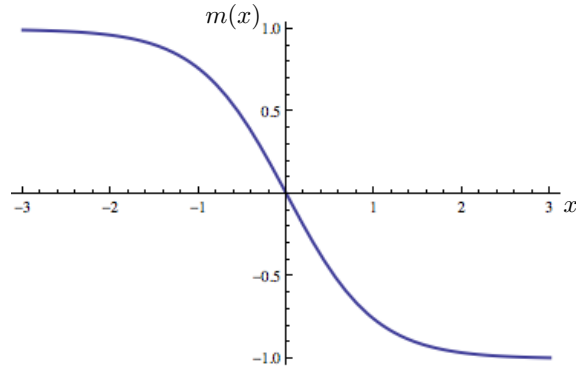
$$H = \begin{pmatrix} m(x) & -iv_F \hbar \partial_x - v_F \hbar \partial_y \\ -iv_F \hbar \partial_x + v_F \hbar \partial_y & -m(x) \end{pmatrix}$$

In that case the ansatz for a solution has to be modified in order to incorporate the broken translational symmetry. Show that in this situation using a specific ansatz leads to

$$H = \begin{pmatrix} m(x) & -iv_F \hbar \partial_x - iv_F \hbar k_y \\ -iv_F \hbar \partial_x + iv_F \hbar k_y & -m(x) \end{pmatrix} \quad (3.1)$$

In (c) you showed that the low energy spectrum does not depend on the sign of m and consequently it does not seem important. In the following we will find that while this is true, there is something special happening if we link two spatial regions with opposing signs of the mass term.

- 3.e)** We assume that the mass has the form sketched in Figuur 3.1
(3 pt)



Figuur 3.1 Massprofile

One can show that for a generic mass-profile of the depicted type there is a zero energy bound state for $k_y = 0$ sitting at $x = 0$. Show this explicitly by making the following ansatz for the wavefunction: $\psi(x, k_y = 0) = \vec{\phi} e^{\lambda(x)}$ with $\vec{\phi}$ being a two-component spinor. You will find there are two solutions where only one is physical. Argue why this is the case and give a possible interpretation of this result.

- 3.f)** You can go beyond this zero energy solution and derive an effective low energy Hamiltonian of the boundary (vicinity of $x = 0$). This is achieved by projecting the Hamiltonian in Equation (3.1) at finite momentum k_y into the set of normalizable wavefunctions. Show that the effective boundary Hamiltonian as a function of k_y corresponds to

$$H = -v_F \hbar k_y.$$

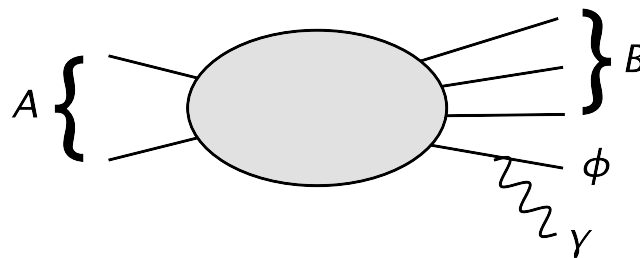
Give an interpretation of this solution.

Hint: Think about the propagation direction of the boundary state.

4. Low energy photons and gauge invariance

W.J. Waalewijn
 Universiteit van Amsterdam
 12 punten

In this exercise p , p' and k are four-vectors, the metric is $\text{diag}(+1, -1, -1, -1)$. The complex conjugate of ϵ is ϵ^* .



Figuur 4.1 High energetic collision

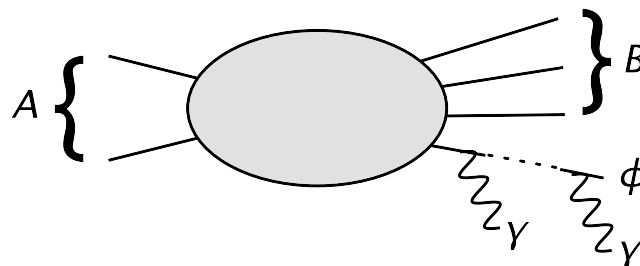
Consider a scalar particle ϕ produced in a highly energetic collision, $A \rightarrow B\phi(p)$, illustrated in the figure. The scalar has electrical charge q and we will study the low-energy photons it can emit. In this limit the amplitude factors are

$$M(A \rightarrow B\phi(p)\gamma(k)) = M(A \rightarrow B\phi(p'))M(\phi(p') \rightarrow \phi(p)\gamma(k)),$$

$$M(\phi(p') \rightarrow \phi(p)\gamma(k)) = \frac{q(p + p') \cdot \epsilon(k)}{p'^2 - m^2}. \tag{4.1}$$

where the intermediate $\phi(p')$ is off its mass shell and $\epsilon_\mu(k)$ is the photon polarization. Recall that the mass shell condition is $p^2 = m^2$.

- 4.a)** Expand (4.1) in the limit where the photon has a low energy, keeping only the leading term. (2 pt)
- 4.b)** Repeat the calculation for the emission of n soft photons with momenta k_i , by iterating (4.1). (2 pt)



Figuur 4.2 Example of emission of multiple soft photons

- 4.c)** Show that the amplitude for emitting n photons can also be written as
(2 pt)

$$M(\phi(p') \rightarrow \phi(p)\gamma(k_1)\dots\gamma(k_n)) = \langle \gamma(k_1)\dots\gamma(k_n) | \exp \left(i q \int_0^\infty ds p \cdot A(sp^\mu) \right) | 0 \rangle \quad (4.2)$$

where $A_\nu(sp^\mu)$ is the photon field at the position $x^\mu = sp^\mu$. In momentum space, the field $A_\nu(k')$ produces a photon with momentum k' ,

$$\langle \gamma(k) | A_\nu(k') | 0 \rangle = (2\pi)^4 \delta^4(k - k') \epsilon_\nu^*(k)$$

- 4.d)** These results directly carry over to the case where e.g. a fermion instead of a scalar is produced. Explain why these low-energy photons do not probe the spin of the fermion.
(2 pt)
- 4.e)** Electromagnetism is invariant under the gauge transformation $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \xi$. How does the exponential in (4.2) transform?
(2 pt)
- 4.f)** Now consider the other particles in the initial state A and final state B and explain how gauge invariance of the amplitude for producing low-energy photons is restored.
(2 pt)

5. Shockley-Queisser limiet

M. Scholten
Universiteit Utrecht
12 punten

Je hebt je vast wel eens afgevraagd waarom zonnecellen zo'n laag rendement hebben. En waarom zonnecellen van halfgeleiders gemaakt moeten worden? En waarom dat altijd Silicium (en niet bijvoorbeeld Natriumtelluride (TeNa_2)) moet zijn? In deze opgave zullen we (een deel van) deze vragen beantwoorden. Hiervoor zullen we een toy-model gebruiken van wat er in een zonnecel gebeurt.

Halfgeleiders hebben een bandgap, wat betekent dat er een regio van energieën is, waar geen elektronische toestanden zijn. Elektronen kunnen deze energie dus niet hebben. Boven de bandgap zit de zogeheten geleidingsband, eronder de valentieband. Voor halfgeleiders is de valentieband volledig gevuld, terwijl de geleidingsband leeg is. Als een zonnecel een foton absorbeert, wordt een electron geëxciteerd van de valentieband naar de geleidingsband. Hier zal hij zijn energie snel kwijtraken tot hij aan de onderkant van de geleidingsband eindigt. Doordat dit exciteren lokaal gebeurt ontstaat er een energieverval tussen de regio's ter grootte van de bandgap. Hierbij hoort een potentiaal $V = \frac{E_g}{e}$ met E_g de bandgap energie en e de elektronlading. Deze potentiaal kan vervolgens gebruikt worden om een schakeling te voeden.

Het vervelende van het licht van de zon is dat het niet monochromatisch is, maar een spectrum. Het voldoet bij benadering aan het spectrum van een zwarte-lichaamsstraler. In ons toy-model zullen wij aannemen dat dit het zonnenspectrum exact beschrijft.

We kunnen hierdoor direct al twee problemen identificeren waarom geen rendement van 100% gehaald kan worden. Ten eerste hebben niet alle fotonen een hoog genoeg energie om een elektron de bandgap te laten oversteken. De energie hieruit kan dus niet in elektrische energie worden omgezet.

5.a) Hoeveel energie gaat hierdoor verloren? Werk je antwoord uit tot je niet meer analytisch verder kunt. (1 pt)

Fotonen met een energie groter dan de bandgap zullen niet alle energie optimaal kunnen benutten, omdat per elektron een maximale energie van E_g in elektrische energie omgezet kan worden.

5.b) Hoeveel energie gaat hierdoor verloren? Werk je antwoord wederom uit tot je niet meer analytisch verder kunt. (1 pt)

5.c) Hoeveel energie wordt in totaal in elektrische energie omgezet. Benader het Planck-spectrum met de benadering van Wien, (deze is niet echt geldig in dit regime, maar de conclusies blijven kwalitatief hetzelfde). (2 pt)

5.d) Wat is de efficiëntie? Schrijf dit als functie van de ratio tussen E_g en de typische thermische energie $E_T = k_B T$. (2 pt)

5.e) De efficiëntie heeft een maximum, dit is de Shockley-Queisser limiet. Waarom heeft de efficiëntie een maximum? Schat waar dit maximum zich ongeveer bevindt en geef de bijbehorende maximale efficiëntie. (2 pt)

5.f) Hoe zou je een zonnecel kunnen bouwen die de Shockley-Queisser limiet doorbreekt? (2 pt)

5.g) Reken de maximale efficiëntie uit. Voor welke bandgap energie is dit. Neem aan $T = 6000\text{K}$. (2 pt)

Handige formules:

Hint: De intensiteit die een zwart lichaam uitstraalt per steradiaal per eenheid frequentie is gegeven door:

$$B_\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2(e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1)}.$$

Hint: De intensiteit die een zwart lichaam uitstraalt per steradiaal per eenheid golflengte is gegeven door:

$$B_\nu = \frac{2hc^2}{\lambda^5(e^{\frac{hc}{\lambda k_B T}} - 1)}.$$

In de benadering van Wien vervalt in beide vergelijkingen de term -1 in de noemer

Hint: Een oplossing van de vergelijking

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

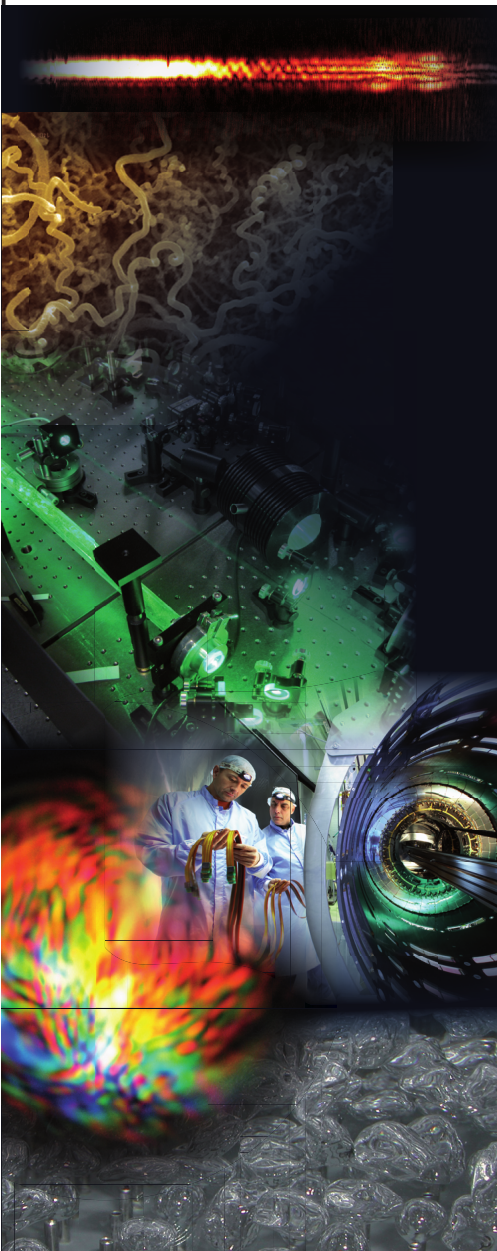
is

$$-\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

waarbij

$$p = \frac{3ac - b^2}{3a^2}; \quad q = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}.$$

At the physics frontier



Doing research for the next four years?
Working on a subject you like in any field of physics?
Just out of curiosity or motivated by a technological problem? In an outstanding Dutch research group?
Or even in a laboratory abroad for some time?
And attending several international congresses?

You can do all of this as a PhD student at FOM.

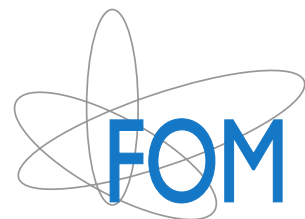
At FOM, PhD students are called 'researchers in training' (onderzoekers in opleiding), oio for short in Dutch. Usually oio positions at FOM are attached to research projects for which university professors have won a grant from FOM. These professors look for candidates to fill their oio positions. Make sure they know that you would like to work on a specific project or in a specific field. Build your own network, find out where you would like to do research and let the people in charge know you are there!

More information about FOM's research programmes, its conditions of employment and current vacancies can be found on our website www.fom.nl.

If you would like to talk to somebody about the opportunities then please call our Personnel Department, telephone +31 30 600 12 62.

Foundation for Fundamental Research on Matter

| P.O. Box 3021 | 3502 GA Utrecht | The Netherlands | www.fom.nl



6. Relativistische velden

P. Kristel
Universiteit Utrecht
12 punten

In deze opgave werken we met de conventie $\hbar = c = 1$. Verder lopen Griekse indices van 0 tot en met 3, en de indices i en j lopen van 1 tot en met 3. In deze opgave is elk inproduct een Minkowski-inproduct, dat wil zeggen

$$p \cdot p = p_0 p_0 - p_1 p_1 - p_2 p_2 - p_3 p_3 = p_\mu p^\mu.$$

Een van de belangrijkste objecten in speciale relativiteitstheorie is de groep van Poincaré-transformaties. In deze opgave zullen we bekijken hoe scalar- en vectorvelden transformeren onder Poincaré-transformaties.

De Poincaré-transformaties zijn de symmetrieën van vier-dimensionale Minkowski ruimte, preciezer: de Poincaré-transformaties zijn de transformaties die de Minkowski-afstand tussen elk willekeurig paar punten onveranderd laten. Elke Poincaré-transformatie is te schrijven als de samenstelling van een Lorentz-transformatie met een translatie.

Een klassiek vector-veld is een vector-waardige functie op Minkowski ruimte. We willen graag weten wat een Poincaré-transformatie doet met een vector-veld. Als a een Minkowski viervector is dan schrijven we $U(a)$ voor de Poincaré-transformatie die hoort bij ‘verschuiving langs a ’.

- 6.a)** We gokken dat ‘verschuiving langs a ’ ook voor velden ‘verschuiving langs a ’ betekent. Dat wil zeggen als φ een veld is, dan geldt

$$U(a)\varphi(x) = \varphi(x + a).$$

Laat zien dat $U(a)$ te schrijven is als

$$U(a) = \exp\left(a_0 \frac{\partial}{\partial t} + a_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + a_3 \frac{\partial}{\partial x_3}\right) = \exp(a_\mu \partial^\mu). \quad (6.1)$$

Als L een Lorentz-transformatie is, dan schrijven we $U(L, a)$ voor: éérst het toepassen van L en dan verschuiven met a .

- 6.b)** Vereenvoudig $U(L, 0)^{-1}U(a)U(L, 0)$.
(1 pt) *Hint: pas de transformatie toe op een Minkowski-vector x .*

- 6.c)** Stel dat $\varphi(x)$ een eigenvector van $U(a)$ is, voor alle a , met eigenwaarde $\exp(ip \cdot a)$, voor een zekere viervector p . Laat zien dat $U(L, 0)\varphi(x)$ weer een eigenvector van $U(a)$ is, voor alle a . Vind de bijbehorende eigenwaarde, en breng deze tot de vorm $\exp(ip' \cdot a)$.
(2 pt)

De operator $\partial/\partial x_i$ wordt in de kwantum-mechanica geassocieerd met de impuls in de x_i -richting, in combinatie met Vergelijking (6.1) verklaart dit de keuze voor de letter p

hierboven. Als een functie φ een eigenvector voor deze operator is, betekent dit dat deze veldconfiguratie een goed bepaalde impuls heeft.

- 6.d)** Als gegeven is dat $p \cdot p = m^2$, wat geldt er dan voor $p' \cdot p'$? Kunnen Poincaré-transformaties de massa m van het veld veranderen? (1 pt)

We beschouwen nu zogenaamde massieve vector-velden. Dat wil zeggen $m \neq 0$.

Om een veldentheorie te beschrijven hebben we een differentiaalvergelijking nodig die de tijdsevolutie van het veld geeft. Een relatief simpele differentiaalvergelijking is de Klein-Gordon vergelijking

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \right) \varphi(x) + m^2 \varphi(x) = 0,$$

of met behulp van de Einstein sommatie conventie

$$\partial_\mu \partial^\mu \varphi(x) + m^2 \varphi(x) = 0.$$

- 6.e)** Veronderstel nu dat φ een scalarveld is, dat wil zeggen dat (2 pt)

$$U(L, a)\varphi(x) = \varphi(Lx + a),$$

en laat zien dat als $\varphi(x)$ een oplossing van de Klein-Gordon vergelijking is, dat dan $U(L, a)\varphi(x)$ ook een oplossing van de Klein-Gordon vergelijking is.

Uit de kwantummechanica weten we dat $\partial_\mu \partial^\mu$ overeenkomt met $p \cdot p$. Als we dus willen dat $p \cdot p = m^2$ dan zal het desbetreffende veld in ieder geval aan de Klein-Gordon vergelijking moeten voldoen. We zullen nu de Dirac-vergelijking beschouwen, hier is

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_2(x) \\ \vdots \\ \psi_n(x) \end{pmatrix}$$

een complex vector-veld (spinor-veld). Verder zijn $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ en β een viertal $n \times n$ -matrices. De Dirac-vergelijking is nu

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} + i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \beta m \right) \psi = 0,$$

waar we de Einstein-sommatie conventie gebruiken, dat wil zeggen

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \alpha_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \alpha_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

Hieronder is δ_{ij} het Kronecker-Delta symbool, dat wil zeggen dat $\delta_{ii} = 1$ (geen sommatie) en $\delta_{ij} = 0$ voor $i \neq j$. En verder is $\text{Id}_{2 \times 2}$ de 2×2 -eenheidsmatrix.

6.f) Neem aan dat de vergelijking
(2 pt)

$$\alpha_i \alpha_j + \alpha_j \alpha_i = 2\delta_{ij} \text{Id}_{n \times n} \quad (6.2)$$

geldt en vermenigvuldig de Dirac-vergelijking van links met

$$-i \frac{\partial}{\partial t} + i \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} - \beta m.$$

en leid uit het resultaat een tweetal voorwaarden (in aanvulling op Vergelijking (6.2)) af, op α_i en β , zodat het resultaat de Klein-Gordon vergelijking is.

Hint: Gebruik het feit dat partiële afgeleiden commuteren om de term

$$\alpha_i \alpha_j \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}$$

te herschrijven.

6.g) Geef een drietal 2×2 matrices α_i die aan Vergelijking (6.2) voldoen (met $n=2$). (Hier zijn meerdere antwoorden mogelijk, het is dus belangrijk te laten zien dat de matrices die u opschrijft ook daadwerkelijk aan Vergelijking (6.2) voldoen!)
(2 pt)

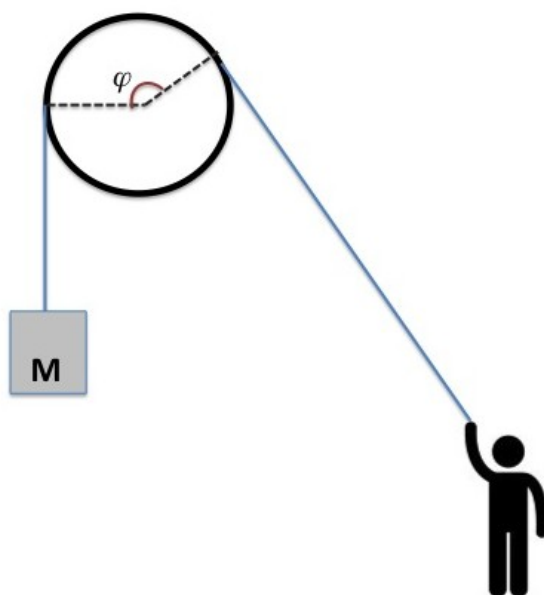
7. The Amsterdam problem

V. Gritsev
Universiteit van Amsterdam
8 punten



In former times, traders of Amsterdam used upper floors of their houses to store goods for the purpose of protecting them against floods. To deliver them upstairs people used pulleys (which is the case even nowadays, see the picture).

- 7.a)** (8 pt) Suppose a mass M is attached to the bottom part of the rope, as shown in the figure below. The angle between the rope and the horizontal direction is φ . Let's denote by μ the friction coefficient between the rope and the surface of the pulley's wheel. Find a minimal force needed to keep the mass M fixed without movement.



8. Gravitational effects of sea level change

R.S.W. van de Wal, M.M. Helsen, J. Oerlemans
Universiteit Utrecht (IMAU)

12 punten

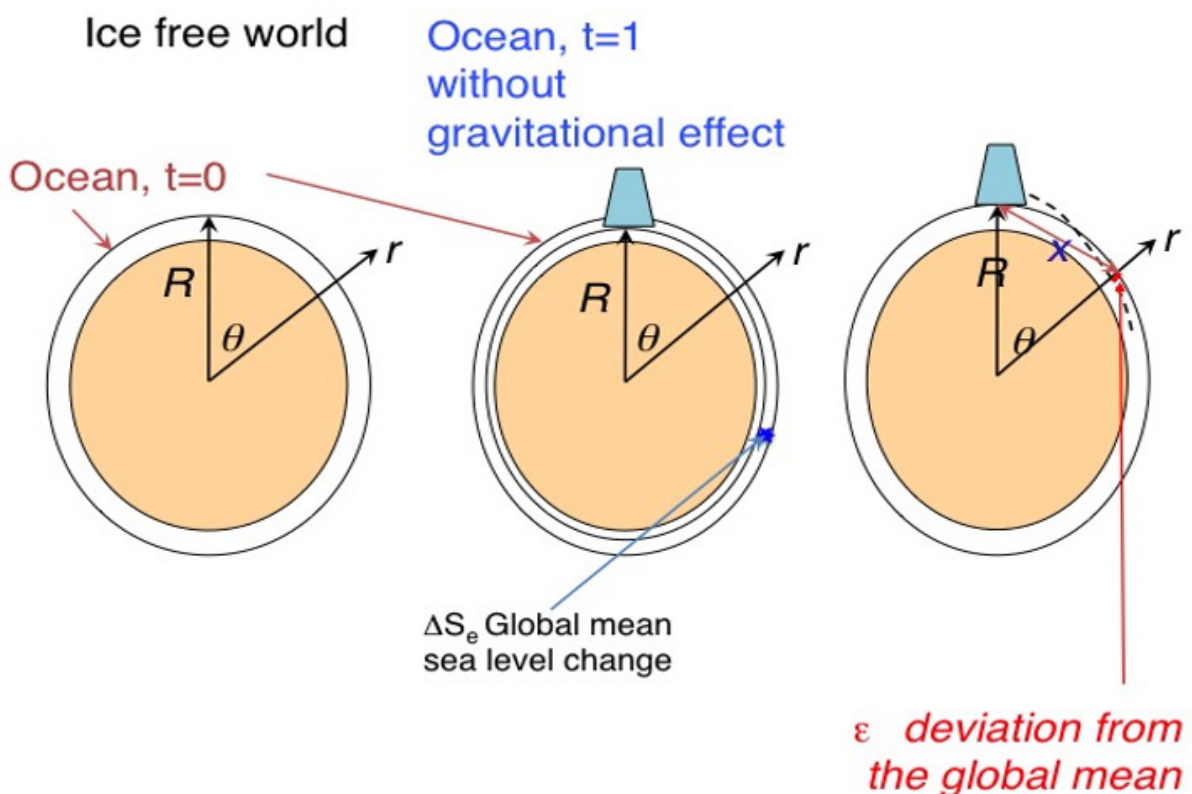
The sea level is an equipotential surface determined by gravity, which depends on the distribution of ice on Earth. If we assume that the Earth is a circular aqua-planet with an ocean over the entire surface area, the sea level will be everywhere at a distance r from the center of the Earth.

The gravitational potential is given by:

$$\phi(r) = \frac{GM_e}{r}$$

with G the gravitational constant, and M_e the total mass of the Earth.

If we now take a mass of water from the ocean and assume this forms an ice sheet as sketched below we realize that the gravitational potential at the surface has changed.



- 8.a)** Provide an expression for the new equipotential $\phi^*(R, \theta)$ as a function of M_i (the mass of ice) and θ , by considering the ice as a point load. (2 pt)

The sea level r at any place is given by:

$$r = R + \epsilon(\theta) + \Delta S_e$$

With $\epsilon(\theta)$ being the gravitation effect, which is the difference between r and R depending on the distance to the ice sheet, and ΔS_e the global mean sea level change caused by the formation of the sheet.

8.b) Use a Taylor expansion to express $\phi^*(R + \epsilon, \theta)$ and neglect second order and higher terms. (2 pt)

The equation for $\phi^*(R + \epsilon, \theta)$ is an equipotential surface and equals the new equipotential at the surface of the Earth $\phi(R, \theta)$.

8.c) This equation can be used to find an expression for ϵ as a function of ice mass and distance θ to the ice mass. Derive this equation. (2 pt)

In order to calculate the true sea level change at any position we need to realize that mass of water is conserved hence:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\epsilon + S_e) r^2 \sin \theta d\lambda d\theta = -\frac{M_i}{\rho_w}$$

with λ the azimuthal angle.

8.d) Use this concept to find an expression for the true sea level change as a function of the mass of ice and the distance θ to the ice sheet. Assume the sea level change caused by the formation of the ice sheets is homogeneous across the planet. (2 pt)

8.e) Explain whether you get wet feet from the change in sea level if you stand at the margin of this ice sheet as it starts to melt rapidly and the ice margin is at sea level initially. (2 pt)

8.f) Calculate the ratio of sea level rise at the Dutch coast for a similar amount of ice melt in Antarctica and Greenland and discuss the implication. (2 pt)

Einde van de opgaven.

11 maart 2016

De PION2016 commissie

- Amber van Keeken (Voorzitter & Promoperson)
- Folkert Kuipers (Penningmeester)
- Peter Kristel (Secretaris)
- Meike Bos (Commissaris sponsoring)
- Michel Ram (Commissaris Boekje & Pubquizmaster)
- Dido Denier van der Gon (Styliste & Goodiebagsupervisor)
- Joris Moens (Bestuurslid)



v.l.n.r: Michel, Amber, Dido, Meike, Folkert, Peter

Comité van aanbeveling

De volgende mensen steunen PION:

- Prof. dr. Robbert Dijkgraaf
- Prof. dr. Gerrit van Meer
- Prof. dr. Gerard 't Hooft

Vrijwilligers

De commissie bedankt de volgende mensen voor het helpen:

- Aldo Witte
- Alex Ben Hassine
- Annemarie Koop
- Bjarne Kosmeijer
- Felix Nolet
- Gerwin van Kuler
- Han van der Ven
- Jasper Smits
- Luuk Vermunt
- Manon Verra
- Marinda Tervoert
- Robert Sokolewicz
- Ruben Meuwese
- Yassir Awwad

π N 2016

Stichting
Physica



ASML



UNIVERSITY OF AMSTERDAM

