

PION 2015

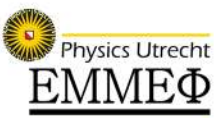
Opgaven



Mede mogelijk gemaakt door



Leiden Institute of Physics



Physics Utrecht
EMMEΦ

UNIVERSITEIT VAN AMSTERDAM



nederlandse



natuurkundige vereniging

stichting physica

Radboud Universiteit



KONINKLIJKE HOLLANDSCHE MAATSCHAPPIJ DER WETENSCHAPPEN



TU/e Technische Universiteit
Eindhoven
University of Technology



KONINKLIJKE NEDERLANDSE
AKADEMIE VAN WETENSCHAPPEN



rijksuniversiteit
 groningen





Nederlandse Natuurkundige Vereniging

Tweedejaarsstudenten
kunnen een jaar gratis
lid worden. Alle andere
studenten krijgen een
flinke korting op de
contributie.

Voordelen van het NNV-lidmaatschap:

- Maandelijks het Nederlands Tijdschrift voor Natuurkunde in de bus
- Zeer aantrekkelijke ledenkorting op het jaarlijkse evenement FYSICA
- Optie op gratis lidmaatschap van de NNV-secties
- Toegang tot het complete digitale NTvN-archief
- Subsidie voor studiereizen en symposia van studieverenigingen
- Geassocieerd lidmaatschap van de European Physical Society
- Verbondenheid met de fysische gemeenschap!

De Nederlandse
Natuurkundige
Vereniging bestaat
al sinds 1921 en is
dé vereniging voor
natuurkundigen
in Nederland. De
NNV is voor alle
fysici: studenten,
fysici werkzaam in
het bedrijfsleven,
onderwijs, academia...
Immers:
Eenmaal fysicus,
altijd fysicus!

Postbus 41882, 1009 DB Amsterdam

T: 020-5922211

E: bureau@nnv.nl



Gezicht van de natuurkunde

www.nnv.nl

Voorwoord

Beste deelnemer,

Voor je liggen de opgaven van PION 2015! We hebben een set van tien uitdagende opgaven over uiteenlopende onderwerpen binnen de natuurkunde voor je samengesteld. De opgaven zijn gemaakt door docenten van verschillende universiteiten, en er is één commissieopgave.

Hieronder een aantal regels om tijdens het maken van de opgaven in de gaten te houden:

- **Maak iedere opgave op een apart blad!**
- Schrijf op elk blad dat je inlevert je teamnaam en de naam van de opgave.
- Je hebt drie uur de tijd om te opgaven te maken.
- Het is niet toegestaan gebruik te maken van boeken, aantekeningen, etc. anders dan een BINAS.
- Het is niet toegestaan (over de opgaven) te communiceren (internet, mobiel, etc.) met anderen dan teamgenoten.
- Het is toegestaan om gebruik te maken van een grafische rekenmachine van het type dat ook is toegestaan tijdens het examen van de middelbare school (Ti-83, Ti-84 of een vergelijkbaar type).
- De aanwezigheid van mobiele telefoons wordt gedoogd, mits deze niet gebruikt worden anders dan voor noodgevallen.

We wensen je veel succes en vooral veel plezier bij het maken van de opgaven!

Jan-Willem Goossens, Robert Sokolewicz, Chris Ripken, Michelle Wassink,
Jeremy de Wit, Freek Roelofs en Anneke Grotenhuis
PION-commissie 2015

Deze pagina is met opzet (bijna) leeg gelaten.

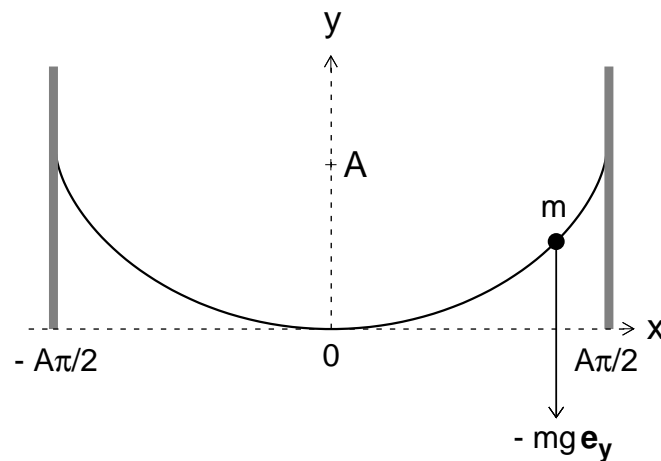
Inhoud

1	Tijd is geld	5
2	Symmetrie in de Molecuulfysica	7
3	Statistical Mechanics: Classical versus Quantum ideal gas	10
4	Torsiemagnetometer	12
5	Rigid Body Rotations and Chandler Wobble	15
6	Emission, energy transfer and time-resolved spectroscopy	17
7	Concentrated Solar Power - Carnot cycle power generator	19
8	Een afgeremd elektron	21
9	Nucleosynthesis in het vroege heelal	23
10	Klein Tunneling in Graphene	25

Deze pagina is ook met opzet (bijna) leeg gelaten.

1. Tijd is geld

Prof. dr. W. Beenakker
Radboud Universiteit Nijmegen
10 punten



Figuur 1.1

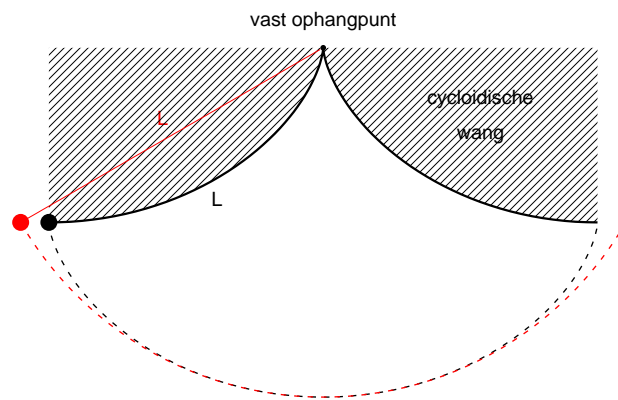
Beschouw een puntdeeltje met constante massa m . Het deeltje glijdt wrijvingsloos langs een in het xy -vlak gelegen vaste onvervormbare draad onder invloed van een constant gravitatieveld met versnelling g in de negatieve y -richting (zie plaatje). De draad heeft een cycloïdische vorm die met behulp van de parameter $\phi \in [-\pi/2, \pi/2]$ is te parametriseren volgens

$$x(\phi) = A[\phi + \sin(\phi)\cos(\phi)] \quad \text{en} \quad y(\phi) = A\sin^2(\phi), \quad (1.1)$$

met A een constante lengte die de afmeting van de draad vastlegt.

- 1.a Geef de Lagrangiaan die hoort bij de beweging van het puntdeeltje langs de draad. Neem hierbij aan dat het nulpunt van de gravitatie-energie bij $y = \phi = 0$ ligt.
- 1.b Ga over op de gegeneraliseerde coördinaat $q \equiv 2A\sin(\phi)$ en leid de bijbehorende bewegingsvergelijking af.
- 1.c Bepaal de tijdsduur die het puntdeeltje nodig heeft om de onderkant van de draad te bereiken als het vanuit stilstand vanaf positie $\phi = \phi_0 \neq 0$ wordt losgelaten.

- 1.d In het midden van de 17^e eeuw ontwikkelde Christiaan Huygens zijn beroemde slingeruurwerk. Bij een gangbare slinger beschrijft de “puntmassa” aan het uiteinde van de slingerdraad een cirkelvormig slingertraject in het xy -vlak (aangegeven in rood in het onderstaande plaatje). Het slingeruurwerk van Christiaan Huygens had echter twee cycloïdische “wangen” (gearceerd in het plaatje) die er voor zorgden dat het feitelijke slingertraject (aangegeven in zwart) precies van bovenstaande cycloïdische vorm was, met A de helft van de lengte L van de slingerdraad. Waarom was dit een zodanige doorbraak dat Huygens er in 1657 patent op heeft aangevraagd?

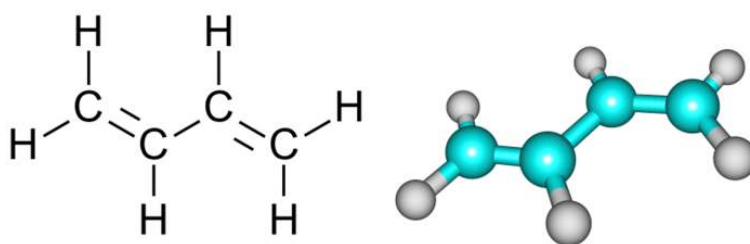


Figuur 1.2

2. Symmetrie in de Molecuulfysica

Prof. dr. J. Oomens
Radboud Universiteit Nijmegen
10 punten

Symmetrie speelt een belangrijke rol in de molecuulfysica. Zoals twee elektronen ononderscheidbaar zijn - er staan immers geen labels op - zo zijn ook identieke atomen in symmetrisch identieke posities in een molecuul ononderscheidbaar. Alle observabelen moeten natuurlijk onveranderd blijven na een symmetrie-operatie. Met andere woorden, operatoren die observabelen voorstellen, zoals de Hamiltoniaan, commuteren met alle symmetrie-operaties uit de puntgroep van het molecuul. Deze eigenschappen leiden ertoe dat er handig gebruik gemaakt kan worden van methodes uit de groepentheorie, bijvoorbeeld bij het construeren van molecular orbitals (eigenfuncties van de moleculaire Hamiltoniaan), bij het bepalen van spectroscopische selectieregels, en bij het vinden van vibrationele eigenfuncties om IR spectra te analyseren. Butadieen behoort tot de C_{2h} puntgroep, die de volgende symmetrie operaties omvat: rotatie over 180° (\hat{C}_2), inversie in het massamiddelpunt (\hat{i}), spiegeling in een vlak loodrecht op de rotatieas ($\hat{\sigma}_h$) en de eenheidsoperator (\hat{E}).

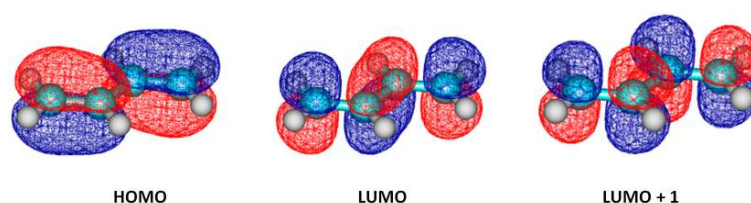


Figuur 2.1 Structuurformule en *ball and stick* model van het molecuul butadieen

- 2.a Identificeer de symmetrie-elementen van de C_{2h} groep in butadieen. Teken het molecuul over en geef duidelijk aan waar de rotatie-as, het spiegelvlak en het inversiepunt liggen.

Nevenstaande figuur geeft de HOMO, LUMO en LUMO+1¹ golffuncties voor butadieen weer. De promotie van een elektron van de HOMO naar de LUMO

¹ HOMO = Highest Occupied Molecular Orbital; LUMO = Lowest Unoccupied Molecular Orbital; LUMO+1 = eerstvolgende onbezette MO.



Figuur 2.2

door absorptie van een foton van de juiste energie is toegestaan als het overgangsdipoolmoment, $TDM = \langle \psi_{\text{final}} | \vec{\mu} | \psi_{\text{init}} \rangle$.

- 2.b Gebruik de symmetrie van het systeem en de karaktertabel van de C_{2h} puntgroep om te bepalen of de HOMO-LUMO overgang al dan niet toegestaan is. Realiseer je dat de uitdrukking voor het TDM een integraal over de gehele ruimte voorstelt en dat het dipoolmoment $\vec{\mu}$ langs de x -, y - of z -as kan liggen. Zoals af te lezen in de op-één-na-laatste kolom in de karaktertabel, transformeren μ_x en μ_y daarom als B_u en μ_z als A_u . Bepaal vervolgens ook of de HOMO \rightarrow LUMO+1 overgang toegestaan is.

C_{2h}	E	C_2	i	σ_h		
A_g	1	1	1	1	R_z	x^2, y^2, z^2, xy
B_g	1	-1	1	-1	R_x, R_y	xz, yz
A_u	1	1	-1	-1	z	
B_u	1	-1	-1	1	x, y	

Figuur 2.3 Karaktertabel van de C_{2h} puntgroep

De 10 nuclei van het molecuul bezitten samen precies 30 onafhankelijke vrijheidsgraden, namelijk beweging in de x , y , en z -richting van elk van de atomen. Deze coördinaten vormen weliswaar een orthogonale basis, maar niet één die transformeert volgens de irreducibele representaties (“irreps”: A_g , B_g , A_u en B_u) van de puntgroep. Er bestaat een unieke set van 30 orthogonale coördinaten - een lineaire combinatie de 30 x, y, z -coördinaten - die wel “symmetry adapted” is; elk van deze “normaal-coördinaten” transformeert dus als één van de vier irreps. Hieruit kunnen translatie van het molecuul als geheel (3 vrijheidsgraden) en rotatie van het molecuul (3 vrijheidsgraden) geïsoleerd worden. De resterende 24 normaalcoördinaten beschrijven dan zuiver de bewegingen van de atomen ten opzichte van elkaar. Deze vibrationele eigenfuncties zijn de oplossingen van de vibrationele hamiltoniaan in het harmonische-oscillatormodel, elk met hun eigen eigenwaarde: de vibrationele frequenties. Het bepalen van de eigenfuncties en eigenwaarden door het oplossen van de vibrationele hamiltoniaan is lastig

24 april 2015

zonder computer, maar de symmetrieën van de eigenfuncties kunnen met groep-theoretische argumenten wel beredeneerd worden.

- 2.c Bepaal hoeveel vibrationele normaalcoördinaten (ook wel: “normal modes”) er van elke symmetrie (A_g , B_g , A_u en B_u) zijn. Tip: elke operator uit de groep kan uitgedrukt worden als een matrix die de transformatie van de x, y, z -coördinaten van alle atomen beschrijft. Het spoor (“Trace”) van elk van de matrices is het karakter van de operator in deze 30-dimensionale representatie. Met behulp van de karaktertabel kan deze reduceerbare representatie afgebeeld worden op de irreps. De op-één-na-laatste kolom in de karaktertabel geeft aan hoe translatie langs, en rotatie om, de x -, y - en z -as transformeert.

3. Statistical Mechanics: Classical versus Quantum ideal gas

Dr. M. Titov
Radboud Universiteit Nijmegen
10 punten

The partition function in the canonical statistical ensemble represents one of the central concepts of Statistical Mechanics. The partition function for a simple gas, which we denote below as $Z_N(V, T)$, depends on the number of particles N , the temperature T , and the volume V . The function $Z_N(V, T)$ encodes the properties of a closed system which is brought to a thermal equilibrium with a large thermal "bath".

The partition function of a quantum gas is formally defined as an operator trace:

$$Z_N = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}} = \sum_{\vec{k}} \langle \Psi_{\vec{k}} | e^{-\beta \hat{H}} | \Psi_{\vec{k}} \rangle, \quad \beta = \frac{1}{k_B T}, \quad (3.1)$$

where \hat{H} is the Hamiltonian operator, the parameter β is proportional to the inverse temperature, and $\Psi_{\vec{k}}$ is an eigenstate of the Hamiltonian operator, which can be labeled with some vector index \vec{k} . In classical mechanics the definition (3.1) is simplified as

$$Z_N^{\text{cl}} = \frac{1}{N!} \int \int \frac{d^{3N} \vec{p} d^{3N} \vec{q}}{h^{3N}} e^{-\beta H(\vec{p}, \vec{q})}, \quad (3.2)$$

where the integration extends over the entire phase space of the system, $H(\vec{p}, \vec{q})$ is the classical Hamiltonian function of N momenta and N coordinates corresponding to each atom in a gas, and h is the Planck constant.

The partition function provides a link from a microscopic description of the system to its thermodynamic description by the relation

$$F(T, V, N) = -k_B T \ln Z_N, \quad (3.3)$$

where F is the free energy of the system: $dF = -SdT - PdV + \mu dN$. Thus, one can easily find, for example, the pressure of the gas kept in a finite volume V at temperature T as

$$P = - \left(\frac{\partial F}{\partial V} \right)_{T,N} = k_B T \frac{\partial \ln Z_N}{\partial V}. \quad (3.4)$$

- 3.a Using the theory overviewed above, prove that for a classical non-interacting (i.e ideal) gas, which is located in a volume V and is described by a Hamiltonian function

$$H(\vec{p}_1, \vec{p}_2, \dots, \vec{p}_N; \vec{q}_1, \vec{q}_2, \dots, \vec{q}_N) = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m}, \quad p_i = |\vec{p}_i|, \quad (3.5)$$

the equation of state takes the form

$$P = P_{cl} = \frac{Nk_B T}{V}. \quad (3.6)$$

- 3.b Argue if the pressure of the corresponding quantum gas (for example, the gas which consists of N non-interacting fermions) is larger, smaller or equal to P_{cl} provided the temperature T and the volume V are the same. Would the result be different if the gas consists of N non-interacting bosons?
- 3.c Consider a quantum ideal gas of two non-interacting fermions characterised by the Hamiltonian operator,

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} (\vec{\nabla}_{\vec{r}_1}^2 + \vec{\nabla}_{\vec{r}_2}^2), \quad (3.7)$$

which are contained in a box with sufficiently large volume V . Take advantage of the definition (3.1) to calculate the corresponding partition function Z_2 provided the two particles are fermions. Remember that for the fermions the wave-function must be anti-symmetric: $\Psi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = -\Psi_{\vec{k}_1, \vec{k}_2}(\vec{r}_2, \vec{r}_1)$. The eigenstates of the gas with the energy $E = \varepsilon_{\vec{k}_1} + \varepsilon_{\vec{k}_2}$ ($\varepsilon_{\vec{k}} = \hbar^2 k^2 / 2m$) are conveniently numerated by two wave-vectors \vec{k}_1 and \vec{k}_2 , which take on some densely spaced discrete values. Take advantage of the fact that in the limit of large system volume one can replace the summation over each of the k -vectors by the integration

$$\sum_{\vec{k}} \rightarrow V \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3}. \quad (3.8)$$

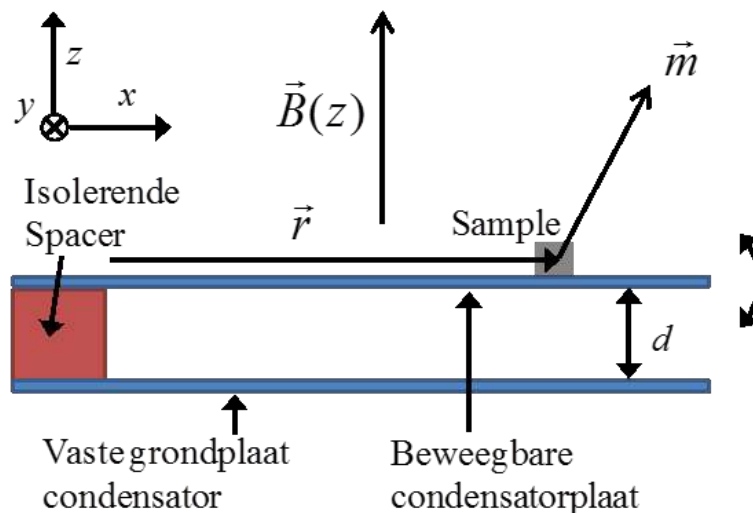
- 3.d Calculate the pressure produced by the gas of two fermions and compare it with the corresponding classical result.
- 3.e Consider a gas of two non-interacting bosons and calculate the corresponding pressure. Is it smaller or larger than the corresponding classical result?

4. Torsiemagnetometer

Prof. dr. P. Christianen
Radboud Universiteit Nijmegen
10 punten

Voor het bestuderen van nieuwe magnetische materialen is het van essentieel belang dat we in staat zijn om hun magnetische eigenschappen zeer nauwkeurig te bepalen. In deze opgave bekijken we een type magnetometer waarmee het mogelijk is om op een gevoelige manier de *anisotrope* magnetische respons van een magnetisch materiaal te bepalen.

Een klein preparaat (sample) met magnetisch moment \vec{m} wordt geplaatst op positie r op de bovenste plaat van een condensator (met capaciteit C) die zich bevindt in een extern magneetveld \vec{B} (zie figuur 4.1). \vec{B} wijst in de positieve z richting, terwijl $B = |\vec{B}|$ afhangt van z (inhomogeen magneetveld). Ten gevolge van de magnetische torsiekracht op \vec{m} zal de bovenste condensatorplaat gaan bewegen ten opzichte van de vaste grondplaat, waardoor de afstand d tussen de twee platen verandert. Dit leidt tot een verandering van C , die gemeten kan worden.



Figuur 4.1 Schematische weergave van de torque magnetometer

4.a Laat zien dat de torsiekracht $\vec{\tau}$ op \vec{m} geschreven kan worden als:

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} + \vec{\nabla} (\vec{m} \cdot \vec{B}) \times \vec{r}, \quad (4.1)$$

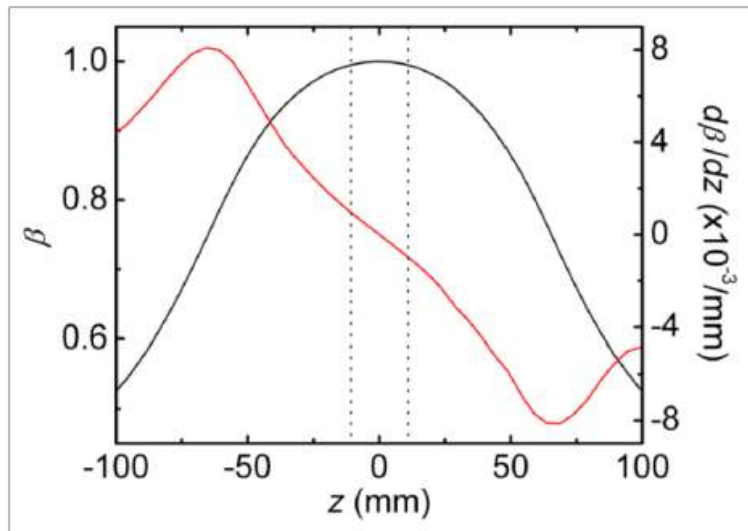
waarbij \vec{r} in de positieve x richting wijst en wordt gemeten ten opzichte van het draaipunt van de bovenste condensatorplaat. Bespreek de fysische oorspong van beide termen in de torsiekracht. Ontbind \vec{m} in componenten parallel en loodrecht op het aangelegde magneetveld:

$$\vec{m} = \vec{m}_{\parallel} + \vec{m}_{\perp}, \quad (4.2)$$

waarbij \vec{m}_{\parallel} in de z richting wijst en \vec{m}_{\perp} in het xy -vlak.

- 4.b Hoe kun je \vec{m}_{\parallel} en \vec{m}_{\perp} onafhankelijk van elkaar bepalen?
- 4.c Waar moet het magnetisch materiaal aan voldoen, opdat \vec{m}_{\perp} niet nul is? Maak hierbij onderscheid tussen diamagnetische, paramagnetische en ferromagnetische materialen.

Neem aan dat het magneetveldprofiel $B(z)$ en de bijbehorende veldgradiënt $dB(z)/dz$ gegenereerd worden door één van de elektromagneten van het High Field Magnet Laboratory (HFML), zoals gegeven door de genormaliseerde profielen in de figuur hieronder. Het veldmaximum B_0 ligt bij $z = 0$ en kan gevarieerd worden tussen 0 T - 37.5 T door de stroomsterkte door de magneet te veranderen. De vorm van $B(z)$ en $dB(z)/dz$ hangen niet af van de waarde van B_0 .



Figuur 4.2 Zwarte lijn (linkse as): genormaliseerde magnetische veldsterkte $\beta(z)$ ($= B(z)/B_0$, met B_0 de veldsterkte in het centrum van de magneet ($z = 0$)) als functie van de verticale positie z in een elektromagneet van het HFML. Rode lijn (rechtse as): de bijbehorende magneetveldgradiënt $d\beta(z)/dz$.

- 4.d Bedenk een experimentele procedure om zowel \vec{m}_{\parallel} en \vec{m}_{\perp} te bepalen met behulp van bovenstaand veldprofiel. Beschrijf deze procedure in zoveel mogelijk detail. Laat in je beschrijving in ieder geval de volgende punten aan bod komen.
- Wat wordt gemeten als functie van welke parameter? Wat voor apparaat heb je hiervoor nodig en hoe ziet zo'n curve er ongeveer uit?
 - Hoe kun je de absolute waarden van \vec{m}_{\parallel} en \vec{m}_{\perp} bepalen?
 - Hoe vaak moet je de meting minimaal herhalen om \vec{m}_{\parallel} en \vec{m}_{\perp} onafhankelijk van elkaar te bepalen?
 - Wat is de relatieve gevoeligheid waarmee \vec{m}_{\parallel} en \vec{m}_{\perp} bepaald kunnen worden?

5. Rigid Body Rotations and Chandler Wobble

Dr. G.A Blab
Universiteit Utrecht
10 punten

We are considering the rotational motion of Earth as that of a rigid body with homogeneous mass distribution (mass $M_{\text{earth}} = 5.97 \text{ kg}$, density $\rho = 5514 \text{ kg m}^{-3}$).

- 5.a Earth is (to a good approximation) an ellipsoid, more accurately an oblate spheroid; that is to say its diameter is smaller when measured from pole to pole ($R_{\text{polar}} = 6356.8 \text{ km}$) than when measured across the equator ($R_{\text{eq}} = 6378.1 \text{ km}$).

Choose your axes wisely so that they are *principal axes* and calculate the inertial tensor \mathbf{I} of the earth. Show that it has two distinct principal moments of inertia λ_1 and λ_3 , and that these two principal moments differ by about one part in 300. [**Hint:** you might need to use:

$$\int \sqrt{c^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} \left(x\sqrt{c^2 - x^2} + c^2 \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}\right) \right), \quad (5.1)$$

$$\int (c^2 - x^2)^{3/2} dx = \frac{1}{8} \left(y(5c^2 - 2y^2)\sqrt{c^2 - x^2} + 3c^2 \arctan\left(\frac{x}{\sqrt{c^2 - x^2}}\right) \right),$$

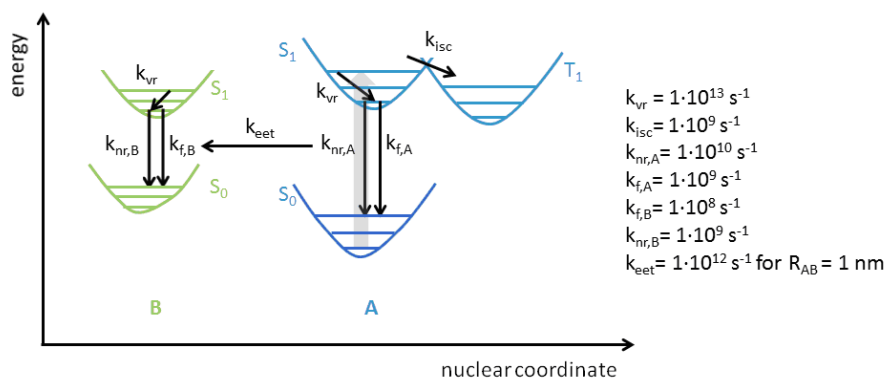
and that $\arctan \infty = \frac{\pi}{2}$]

- 5.b The Euler Equations are the rotational equivalent to Newton's law ($\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Gamma}$, with \vec{L} the rotational moment and $\vec{\Gamma}$ the torque). Derive the general Euler Equation in the body frame rotating with the earth for the case that there is no torque. [**Hint:** remember that the time derivative of a vector in this case is $\frac{d\vec{Q}}{dt} = \dot{\vec{Q}} + \vec{\omega} \times \vec{Q}$.]
- 5.c The rotation of Earth is well described by the Euler Equations that you have found (\hat{e}_3 is the rotational axis of earth, $\lambda_3 \approx 306/305\lambda_1$). The Euler Equations suggest that the direction of the angular velocity $\vec{\omega} = \omega_1\hat{e}_1 + \omega_2\hat{e}_2 + \omega_3\hat{e}_3$ of Earth changes in time. Find the period of this *Chandler Wobble*.

- 5.d In reality, the Chandler Wobble has a period of 433 days, which is not the period you have found. Give two potential explanations that could explain this discrepancy - other than that we used the wrong principal axes or principal moments.

6. Emission, energy transfer and time-resolved spectroscopy

Dr. Ir. A. Huijser
Universiteit Twente
10 punten



Figuur 6.1 Energy diagram of a molecule *A*. A photon can excite molecule *A* from its ground state S_0 to its excited state S_1 . From there, processes such as vibrational relaxation (vr), intersystem crossing (isc), non-radiative decay (nr) and fluorescence (f) can occur, with rate constants k_i . The excitation energy can also be transferred from molecule *A* to molecule *B* via excitation transfer (eet).

- 6.a Explain why the fluorescence spectrum is typically assumed to be a mirror image of the absorption spectrum.
- 6.b Give reason(s) why the emission spectrum will not be the exact mirror image of the absorption spectrum.
- 6.c Calculate the change in measured fluorescence lifetime of molecule *A* ($T_{f,A}$) and fluorescence quantum yield ($\phi_{f,A}$) caused by excitation energy transfer (eet) to molecule *B*.

According to the Förster model the excitation energy transfer rate k_{eet} is proportional to R_{AB}^{-6} , where R_{AB} is the distance between molecules *A* and *B*.

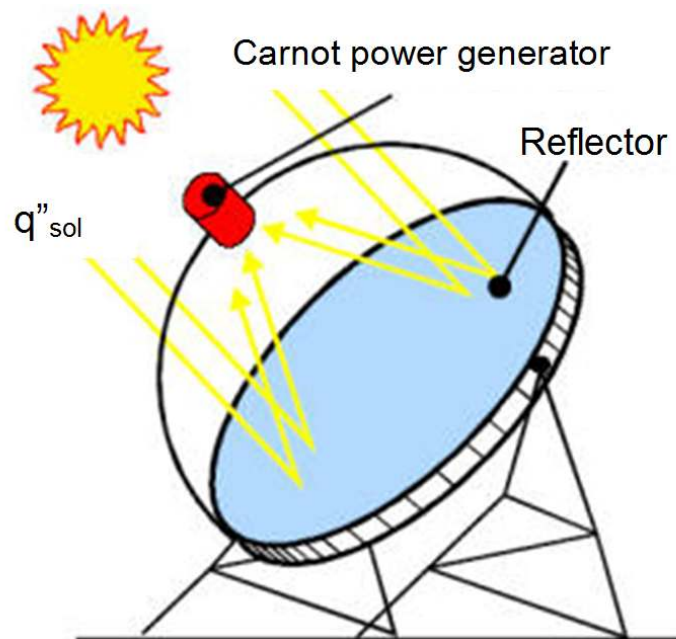
- 6.d How do you expect the fluorescence spectrum and decay to change upon increasing R_{AB} from 1 nm to 3 nm?

- 6.e Make a qualitative drawing; pay also attention at the vibrational levels of A and B .
- 6.f Draw for $R_{AB} = 1$ nm and $R_{AB} = 3$ nm the emission of A and B in time.

7. Concentrated Solar Power - Carnot cycle power generator

Prof.dr. C.R. Kleijn
Technische Universiteit Delft
10 punten

A combined Concentrated Solar Power – Carnot cycle power generator consists of an ideal Carnot power generator, placed in the focal point of a disk reflector. All incoming solar radiation is focused onto the Carnot power generator. As a result, the solar radiation flux to the power generator equals Cq''_{sol} , with q''_{sol} the incoming solar radiation flux in Wm^{-2} and C the concentration factor ($C > 1$). Assume steady-state conditions in which the power generator has attained a temperature T_H . Assume that the Carnot power generator loses heat through radiation only. Model the Carnot power generator as a black body radiator, and assume that it absorbs and emits radiation through the same surface area. The ambient temperature is T_0 .



Figuur 7.1

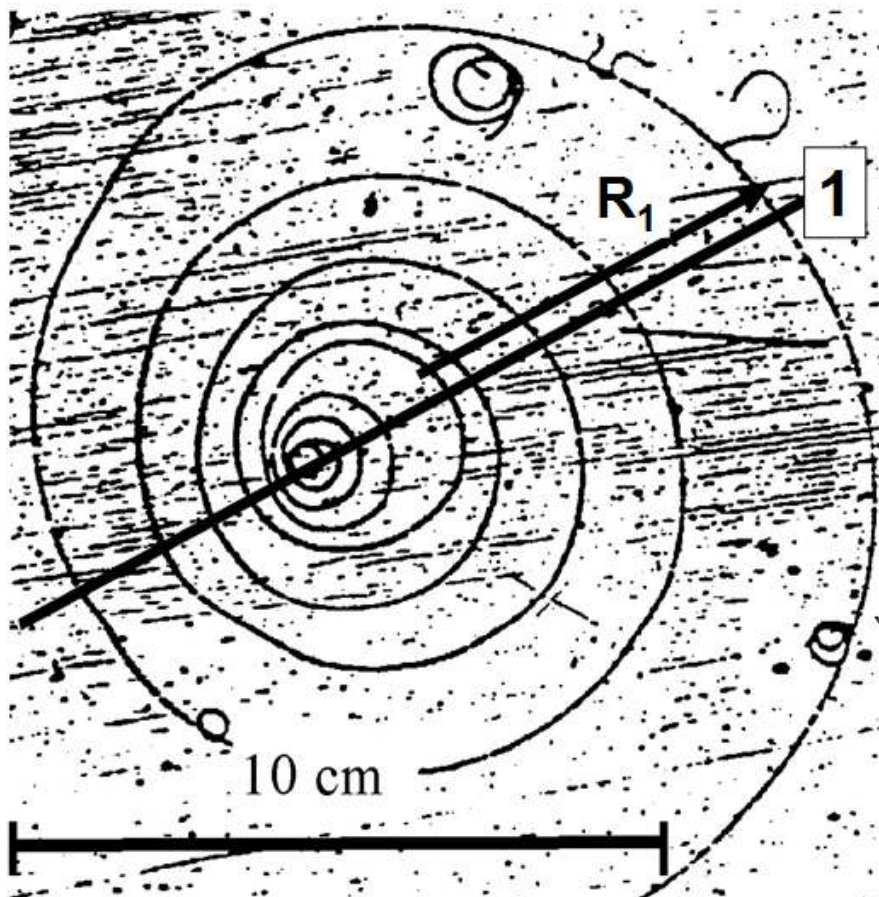
- 7.a Give an expression for the fraction χ of incoming solar radiation that is available for the Carnot cycle, as a function of the power generator temperature T_H , the solar radiation flux q''_{sol} , the Stefan-Boltzmann constant σ , and the concentration factor C .

- 7.b Give an expression for the solar-to-work efficiency ζ of the combined Concentrated Solar Power – Carnot cycle power generator, as a function of the power generator temperature T_G , the ambient temperature T_0 , the solar radiation flux q''_{sol} and the concentration factor C .
- 7.c Give an expression for the maximum generator temperature $T_{G,max}$ that can be reached.
- 7.d Give an expression from which the optimum generator temperature $T_{G,opt}$ may be calculated.

8. Een afgeremd elektron

Drs. H. Jordens
Rijksuniversiteit Groningen
10 punten

In figuur 8.1 is het spoor van een elektron in een bellenvat zichtbaar. Loodrecht op het vlak van de tekening staat een magneetveld met een sterkte van $B = 1,2 \text{ T}$. Het elektron verliest kinetische energie als gevolg van ionisatie van het waterstof in het bellenvat. Gegeven is dat de lichtsnelheid $c = 299792458 \text{ m/s}$ en de massa van een elektron $m_e = 0,511 \text{ MeV}/c^2$.



Figuur 8.1 Het spoor van een elektron in een bellenvat

- 8.a Gebruik de relativistische uitdrukking voor de impuls van het elektron om de waarde van γ van het elektron als functie van de kromtestraal R van de baan te berekenen. Hierin is $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$ als de snelheid van het elektron $v = \beta c$.

- 8.b** Op de snijpunten van de baan van het elektron met de rechte lijn, die door het eindpunt van de baan is getekend, worden de kromtestralen van de baan bepaald. Op de opeenvolgende snijpunten vindt men de volgende meetwaarden:

snijpunt	1	2	3	4	5
$R_i(m)$	0,060	0,047	0,040	0,033	0,028
snijpunt	6	7	8	9	10
$R_i(m)$	0,022	0,019	0,017	0,016	0,010

Bereken in welke punten van de baan de snelheid van het elektron groter is dan 99,9% van de lichtsnelheid.

- 8.c** Bereken de kromtestraal R als functie van de hoek θ ten opzichte van de rechte lijn. Geef van eventueel gemaakte aannamen duidelijk aan waarom die volgens jou te verantwoorden zijn.
- 8.d** Bereken aan de hand van de gegevens in de tabel het energieverlies per meter van het elektron.
- 8.e** Bereken de kinetische energie van het elektron bij snijpunt 1 van de baan van het elektron met de rechte lijn.

9. Nucleosynthesis in het vroege heelal

Prof. Dr. G. Nelemans
Radboud Universiteit Nijmegen
10 punten

In het vroege heelal waren de temperatuur en de dichtheid veel hoger dan nu. Er was zelfs een tijd dat er in het heelal kernfusie plaatsvond. Daarin is helium gevormd. De hoeveelheid helium die we nu in het heelal waarnemen, zegt iets over de uitdijning van het heelal voor de ontkoppeling (wanneer de fotonen en de deeltjes ontkoppelen en dus de fotonen vrij door het heelal kunnen vliegen en we ze kunnen waarnemen). In die periode werd de energiedichtheid (en dus de evolutie) van de heelal gedomineerd door straling.

We beschrijven de uitdijning van het heelal met een zogenaamde schaalfactor $a(t)$ die aangeeft hoe de afstanden veranderen als functie van de tijd: $d(t) = d_0 a(t)$.

- 9.a** Leid uit uw algemene fysische kennis af hoe de temperatuur in de stralingsgedomineerde fase afhangt van a . [U kunt zowel de fotonen beschouwen, of de uitdijning als een adiabatisch proces beschouwen voor een foton-gedomineerd gas met adiabatische index $4/3$].
- 9.b** In het vroege heelal komen veel reacties voor, maar aangezien er heel veel energie in fotonen beschikbaar is, zijn alle reacties (ook die waar de energie aan toegevoegd moet worden of die een lage interactiekans hebben) in evenwicht. Dit geldt dus zowel voor reacties waarin neutrino's worden gevormd en annihileren (zoals $e^+ + e^- \leftrightarrow \nu + \bar{\nu}$), als die waarin neutronen en protonen in elkaar worden omgezet. Echter, als de temperatuur daalt, wordt de energie in fotonen minder en komt er een moment dat de reacties niet meer voorkomen (neutrino's) of alleen nog de kant op gaan waarbij er energie vrijkomt (protonen/neutronen). Welk gevolg zal dit hebben voor het aantal vrije neutrino's en voor de verhouding tussen protonen en neutronen?
- 9.c** De kernfusie in het vroege heelal vindt plaats via de vorming van deuterium uit een neutron en een proton en daarna via het invangen van nog een proton en neutron via tritium of ^3He tot ^4He . Via verdere invang van protonen of neutronen kan ook lithium en beryllium gevormd worden. Als de temperatuur in het heelal is gedaald tot een flink stuk onder de temperatuur waarbij de gemiddelde energie van kernen voldoende is om dicht bij elkaar

kunnen komen om te fuseren, stopt de kernfusie. Waarom “een flink stuk onder”?

- 9.d Beredeneer dat de uitdijning van het heelal niet te snel of te langzaam mag zijn om productie van Helium in het vroege heelal mogelijk te maken.
- 9.e We gaan een schatting maken van de expansiesnelheid van het heelal in de stralingsgedomineerde fase. We nemen aan dat het de uitdijning volgens een machtswet verloopt: $a(t) \propto t^\alpha$. Gegeven dat de leeftijd van het heelal ten tijde van de zogenaamde “proton/neutron freeze-out” ongeveer 1 seconde is, wat is de onderlimiet op α ? [Gebruik uw antwoord op de vorige vraag!]
- 9.f De verhouding tussen het aantal protonen en neutronen op het moment van freeze-out wordt gegeven door

$$\frac{n_n}{n_p} = e^{-(m_n - m_p)c^2/kT}$$

Wat verwacht u dat uiteindelijke massa-verhouding van ${}^4\text{He}$ zal zijn? Klopt dat met de waargenomen verhouding van 0.24?

Vorming protonen/neutronen uit quarks	1	GeV
Neutrino-ontkoppeling	2.5	MeV
Proton/neutron freeze-out	0.7	MeV
Deuterium vorming	0.1	MeV
Minimale energie voor kernfusie	0.03	MeV
Foton ontkoppeling	1	eV
Massa proton	938.272046(21)	MeV/c ²
Massa neutron	939.565378(21)	MeV/c ²
Neutron vervaltijd	10	min.
Halfwaardetijd tritium	12.3	jaar

Tabel 9.1 Tabel met al dan niet relevante getallen

10. Klein Tunneling in Graphene

Robert Sokolewicz
Radboud Universiteit Nijmegen
10 punten

Since its discovery in 2004, graphene has been studied extensively. It is currently the only two-dimensional crystal known to be thermodynamically stable and many interesting properties have been discovered. Due to its electronic structure, electrons do not follow Schrödinger's wave equation, but that of Dirac, known from high energy physics as a relativistic wave equation for spin 1/2 particles². In this exercise, you will use a simple model to study Klein tunneling in graphene, which is responsible for the high electric conductivity found in graphene.

Graphene is a 2D crystal with a hexagonal lattice made entirely from carbon as seen in figure 10.1. This hexagonal lattice is responsible for graphene's unique electronic band structure. In absence of doping, graphene's conduction and valence band touch precisely at the Fermi energy in so called Dirac points. The energy dispersion relation around these points is linear and for small excitations the effective Hamiltonian \mathcal{H} (excluding spin) is given by:

$$\mathcal{H} = \nu \vec{\sigma} \cdot \vec{p} + V(x) \quad (10.1)$$

where ν is the Fermi velocity of the electrons, $\vec{p} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y)$ the momentum, $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y)$ and σ_z are the Pauli matrices given by:

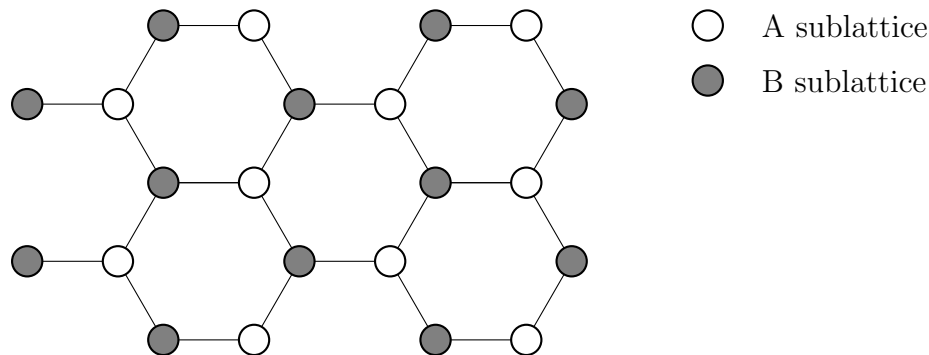
$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

and $V(x)$ is the potential energy.

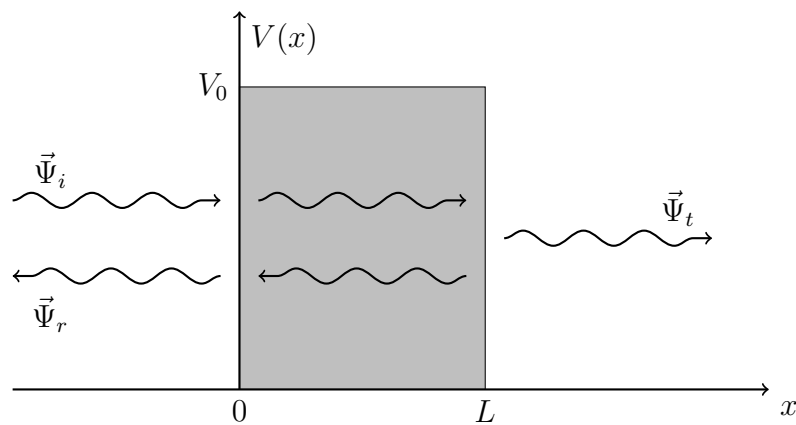
The Hamiltonian acts on a wave function $\Psi(x) = (\varphi^A(x), \varphi^B(x))^T$, where A and B stand for the respective sublattices (see also figure 10.1). \mathcal{H} is a 2D version of Dirac's Hamiltonian with the only difference that here the Fermi velocity $\nu \sim 10^6$ m/s plays the role of speed of light.

Consider a potential barrier of length L and height V_0 :

² "CERN ON ONES DESK."



Figuur 10.1 Graphene's honeycomb lattice.



Figuur 10.2 Tunneling through a potential step.

$$V = \begin{cases} 0 & \text{for } x < 0 \\ V_0 & \text{for } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{for } x > L, \end{cases}$$

where a traveling wave $\vec{\Psi}_i$ is coming from the left, a part $\vec{\Psi}_r$ is reflected off the potential barrier and a part $\vec{\Psi}_t$ is transmitted to the right of the barrier as shown in figure 10.2.

- 10.a** What are the eigenvalues of \mathcal{H} ?³
- 10.b** Calculate the transmission coefficient t . What happens to the transmission probability T when $V_0 \rightarrow \infty$?

³ When writing down \mathcal{H} , it might seem as if \mathcal{H} is not Hermitian since the off diagonal terms equal each other. If you think this is the case, do not worry. \mathcal{H} really is Hermitian! You can convince yourself that iff $\partial/\partial x$ is anti-hermitian, then $\hat{p} = -i\hbar\partial/\partial x$ is hermitian. All you have to do is show that $\langle \phi | \partial/\partial x \phi \rangle = -\langle \partial/\partial x \phi | \phi \rangle$.

24 april 2015

- 10.c Now include a mass term to \mathcal{H} of the form $\Delta\sigma_z$. Repeat questions a and b for $\epsilon > \Delta$.
- 10.d For a Schrödinger particle, the tunneling probability is given by:

$$T = \frac{1}{1 + \frac{V_0^2}{4\epsilon(V_0 - \epsilon)} \sinh^2 \bar{q}L} \quad (10.2)$$

How are the results from a-b different from Schrödinger-like particles?

The results from these questions can be used not only to explain qualitatively why graphene has such a high conductivity, but also the property known as minimal conductivity. Even in highly disordered samples, the electrical conductivity is always larger than $\sim e^2/h$, which can be attributed to the tunneling abilities of Dirac fermions.

De PION-commissie

- Jan-Willem Goossens (voorzitter)
- Robert Sokolewicz (penningmeester)
- Chris Ripken (secretaris)
- Michelle Wassink (commissaris intern)
- Jeremy de Wit (commissaris sponsoring)
- Freek Roelofs (commissaris opgaven)
- Anneke Grotenhuis (commissaris promotie)



v.l.n.r: Michelle, Chris, Anneke, Jan-Willem, Freek, Robert, Jeremy

Comité van aanbeveling

De volgende mensen steunen PION:

- Drs. Hubert Bruls (burgemeester van Nijmegen)
- Prof. dr. Peter Christianen (directeur onderwijsinstituut Wiskunde, Natuur- en Sterrenkunde)
- Prof. dr. Theo Engelen (rector magnificus Radboud Universiteit)
- Prof. dr. Stan Gielen (decaan Faculteit der Natuurwetenschappen, Wiskunde en Informatica)
- Prof. dr. Gerard 't Hooft (Nobelprijswinnaar 1999)
- Prof. dr. Gerard Meijer (voorzitter college van bestuur Radboud Universiteit)

Vrijwilligers

De commissie bedankt de volgende mensen:

- Laura van den Berge
- Jorn Biemans
- Lennart Bours
- Stijn van Erp
- Anton de Groot
- Stefan Horst
- Luc van Kessel
- Roos Leenen
- Thijs Miedema
- Teun van Nuland
- Nicole Orval
- Thom Ottenbros
- Bjarni Pont
- Marion Severijnen
- Bart Steeman
- Edo van Veen
- Ester Wassink
- Marlie van Workum



How do you print 20 nm structures using 193 nm light waves?

Join ASML as a Physics Engineer to find out.

We bring together the most creative minds to develop lithography machines that are key to producing cheaper, faster, more energy-efficient microchips. Our machines image billions of structures in a few seconds. And we intend to be imaging even more billions, because our latest technology will create microchip features of just 20 nm, using light waves of 193 nm. That's like drawing an extremely fine line using an oversized marker. So we need talented Physicists who can design, model and manipulate at nanometer levels.

If you're up for it, you'll be part of a multidisciplinary team with plenty of freedom to experiment and learn new skills.

www.asml.com/careers

ASML

For students who think ahead



/ASML



@ASMLcompany

