



**PION  
2012**

**Opgaven**

**UTRECHT**

Sponsors:

**ASML**

STICHTING  
PHYSICA



**TNO**



gasunie

---

## Inhoudsopgave

---

1.	Maxwells inzicht	2
2.	Geluidsoverlast	4
3.	Thermo-elektrisch transport en opwarming	5
4.	Een roterende cilinder	6
6.	Stroming in een pijp	7
5.	Gletsjers en klimaat	9
7.	Fluorescence from a Single Molecule	11
8.	Druppels in een cilinder	12
9.	Sneller dan het licht	14
10.	Het Metropolis Algoritme	15
11.	Sterrenwind	18
12.	Bepaling van de gemiddelde grootte van poriën in een filter	19

### Colofon

Dit opgavenboekje is een uitgave van de  
PION-commissie 2012.  
*e-mail:* pion@a-eskwadraat.nl  
*internet:* pion.a-eskwadraat.nl

---

## 1. Maxwells inzicht

M. Vreeswijk, Universiteit van Amsterdam

8 punten

---

De wetten van Maxwell zijn als volgt:

- electrostatica:

$$- \oint_{\text{kring}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

$$- \Phi_E \equiv \oint_{\text{oppervlak}} \vec{E} \cdot d\vec{\sigma} = \frac{Q_{\text{omsloten}}}{\epsilon_0}$$

- magnetostatica:

$$- \oint_{\text{kring}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{omsloten}}$$

$$- \Phi_B \equiv \oint_{\text{oppervlak}} \vec{B} \cdot d\vec{\sigma} = 0$$

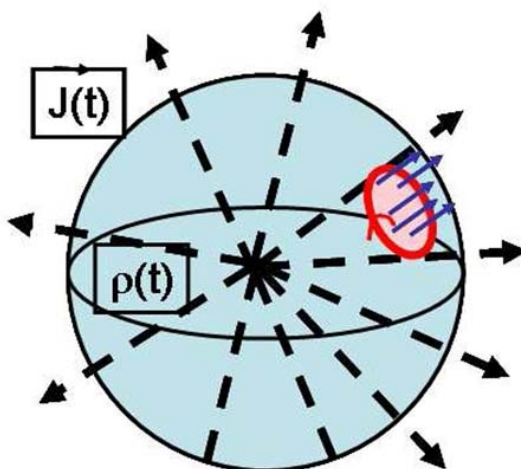


Figure 1.1: Hoeveelheid lading in de oorsprong

In de oorsprong van ons coördinatensysteem bevindt zich een hoeveelheid elektrische lading:  $Q(t) = Q_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$  waarbij  $t$  de tijd is,  $\tau$  een constante en  $Q_0$  de lading op tijdstip  $t = 0$ .

1. Bereken met behulp van de wet van Gauss het elektrische veld dat wordt veroorzaakt door de lading in de oorsprong. Geef hierbij met een tekening aan welk Gauss-oppervlak je hierbij gebruikt.

De elektrische lading die in de oorsprong zit kan natuurlijk niet zomaar verdwijnen. We nemen aan dat de lading in radiële richting naar buiten beweegt (stroomt).

**2.** Geef een uitdrukking voor de elektrische stroom  $I(t)$  en de stroomdichtheid  $\vec{J}$ . (Denk erom dat de stroomdichtheid een vector is en dus een richting heeft).

**3.** Beredeneer met behulp van een symmetrieargument dat er geen magneetveld kan zijn parallel aan het oppervlak van de denkbeeldige bol in figuur 1.1.

**4.** Beredeneer met behulp van de wet van Ampère dat er wel een magneetveld parallel aan het oppervlak van de bol moet zijn. Laat je eventueel inspireren door het Ampèrelusje dat in figuur 1.1 is opgenomen.

De antwoorden onder **3.** en **4.** zijn tegenstrijdig. Wij weten allen dat Maxwell deze tegenstrijdigheid op briljante wijze heeft opgelost door een term toe te voegen aan de wet van Ampère.

**5.** Geef de wet van Ampère in integraalvorm met de toevoeging van Maxwell. Laat zien dat met Maxwells toevoeging het magneetveld bij **4.** nu ook verdwijnt. (Hint: gebruik de antwoorden gevonden onder **1.** en **2.**)

---

## 2. Geluidsoverlast

Hans Jordens, Universiteit Groningen

9 punten

---

In Noord-Groningen wordt onderzoek gedaan naar de geluidsoverlast van laagvliegende F16's. Het terrein is open en vlak. Op een bepaald moment wordt op grote afstand een F16 waargenomen die op constante hoogte in de richting van de waarnemers vliegt. Direct na het zien van de F16 wordt de opnameapparatuur aangezet en het spectrum van het geluid als functie van de tijd gemeten. De frequentie van de toon die het hardste klinkt is in de grafiek als functie van de tijd uitgezet. De minimumhoogte waarop gevlogen mag worden is 1000 ft. Neem aan dat de absorptie van het geluid te verwaarlozen is.

Gegeven:

De geluidssnelheid is  $343\text{ms}^{-1}$

$1\text{ft} = 0,3048\text{m}$

Bepaal aan de hand van de gegevens in figuur 2.1

1. De snelheid waarmee de F16 vliegt,
2. de frequentie van de hardst klinkende toon in het opgenomen spectrum,
3. of de F16 zich aan de minimumhoogte houdt,
4. de horizontale afstand waarop de F16 voor het eerst werd waargenomen.

Geef duidelijk aan hoe je de berekeningen uitvoert.

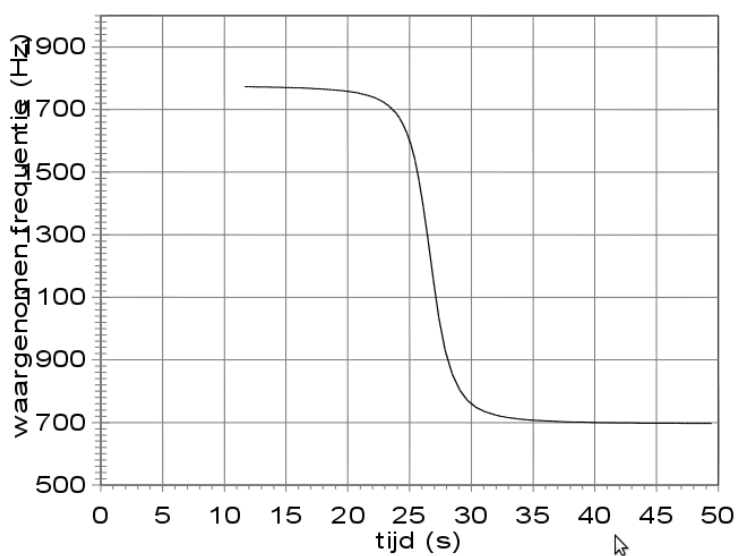


Figure 2.1: De waargenomen frequentie (Hz) uitgezet tegen de tijd (s)

---

### 3. Thermo-elektrisch transport en opwarming

*R.A. Duine, Universiteit Utrecht*

**11 punten**

---

Beschouw een elektrische geleider waarover een temperatuursverschil  $T$  en een spanningsverschil  $V$  zijn aangelegd.

1. Neem in eerste instantie het temperatuursverschil gelijk aan nul ( $T = 0$ ) en neem aan dat de elektrische stroom  $I$  bepaald wordt door de wet van Ohm:  $I = V/R$ , met  $R$  de weerstand van de geleider. Laat uit de Eerste Hoofdwet van de Thermodynamica,  $dU = dQ + \mu dN = TdS + \mu dN$  (met  $dU$  : energieverandering,  $dQ$  warmte,  $\mu$ : chemische potentiaal,  $dN$  : verandering van het aantal deeltjes,  $T$  : temperatuur, en  $dS$ : entropieverandering), zien dat de totale warmte, geproduceerd door de elektrische stroom per tijdseenheid, gegeven wordt door

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\Delta V^2}{R} \quad (3.1)$$

2. Vervolgens beschouwen we de situatie dat  $V = 0$ , en  $T = 0$ . Er is nu zowel een elektrische ( $I$ ), als een warmtestroom ( $I_Q$ ) door de geleider. Neem aan dat hiervoor geldt:

$$I = \frac{\Delta V}{R} - \frac{S\Delta T}{R} \quad (3.2)$$

en

$$I_Q = \frac{P\Delta V}{R} - \kappa' \Delta T \quad (3.3)$$

Hierbij is  $S$  de Seebeckcoëfficiënt, en  $P$  de Peltiercoëfficiënt. Voorts is  $\kappa'$  de warmtegeleidingscoëfficiënt voor  $\Delta V = 0$ . Laat nu uit de Eerste Hoofdwet zien dat:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{\kappa' \Delta T^2}{T} + \frac{\Delta V^2}{R} - \frac{P\Delta V\Delta T}{RT} - \frac{S\Delta V\Delta T}{R} \quad (3.4)$$

3. Gebruik nu de Tweede Hoofdwet van de Thermodynamica om aan te tonen dat de transportcoëfficiënten moeten voldoen aan  $\kappa' R \geq PS$

---

#### 4. Een roterende cilinder

*J. van Dongen en D. Dieks, Universiteit Utrecht*

**10 punten**

---

In 1908 legde Paul Ehrenfest een problematisch geval voor aan de natuurkundigen die zich met de destijds nieuwe (speciale) relativiteitstheorie bezig hielden. Het probleem leidde tot heftige discussies en diende Albert Einstein tot inspiratie bij het verder uitwerken van zijn theorie.

Ehrenfest stelde zich de volgende situatie voor:

Een vast lichaam met de vorm van een cilinder, met hoogte  $H$ , straal  $R$  en omtrek  $O$  ( $O = 2\pi R$ ) is aanvankelijk in rust en wordt vervolgens in draaiende beweging rond zijn as gebracht. Vanaf zeker moment roteert de cilinder met constante hoeksnelheid. Een waarnemer die met de cilinder meebeweegt meet dan een straal  $R'$  en omtrek  $O'$ .

1. Wat verwacht je op grond van de speciale relativiteitstheorie voor de verhouding tussen  $R'$  en  $O'$ ?
2. Wat is er volgens jou problematisch aan dit geval?
3. Probeer je eigen analyse te geven van wat er met de cilinder gebeurt.

---

## 5. Stroming in een pijp

Han Velthuis, TNO Fluid Dynamics

8 punten

---

Gegeven is een lange ronde buis waardoor water stroomt. De inwendige radius van de buis is  $R = 0.025m$ . De lengte van de buis is  $L = 1km$ . We nemen aan dat de stroming door de buis ontwikkeld is en stationair. Dat wil zeggen dat het snelheidsprofiel van het water in de pijp niet meer verandert als functie van de tijd en niet meer als functie van de coördinaat in stroomrichting. Het snelheidsprofiel  $u(r)$  is dus enkel een functie van de straal  $r$ , waarbij de straal wordt gerekend vanuit de hartlijn van de buis. De variabele  $u$  stelt de watersnelheid voor. De drukval over de pijplengte  $L$  wordt voorgesteld door de variabele  $\Delta p$ .

- Beneden een kritisch kental is de stroming laminair. Oplossen van de theoretische stromingsvergelijkingen (Navier-Stokes, 1822) levert dan een parabool als snelheidsprofiel op. De watersnelheid is daarbij nul aan de wand ( $r = R$ ), en maximaal op de hartlijn ( $r = 0$ ).

- Boven een kritisch kental is de stroming turbulent. Het turbulente snelheidsprofiel wordt in de literatuur wel eens beschreven met een zogenaamde power-law functie, waarbij het snelheidsprofiel evenredig is met  $(y/R)^c$ . Hierin is  $y$  de afstand tot de wand,  $c$  is een constante (neem hiervoor  $c = \frac{1}{7}$ ).

- Het kritische kental wordt gegeven door het zogenaamde Reynolds nummer  $Re = \frac{\rho u_{ave} D}{\mu}$ , genoemd naar de beroemde Britse geleerde op het gebied van de stromingsleer Osborne Reynolds (1842-1912). Hierin is  $\rho$  de dichtheid van water,  $D$  de inwendige pijpdiameter, en  $\mu$  de dynamische viscositeit van water. De gemiddelde watersnelheid over de buisdoorsnede wordt gegeven door  $u_{ave}$ . De overgang van laminaire stroming naar turbulente stroming vindt in de praktijk vaak plaats bij een kritisch Reynolds getal van ongeveer  $Re \approx 2300$ .

Water gedraagt zich als een zogenaamde Newtonse vloeistof. In dat geval is de visceuze schuifspanning  $\tau$  die door het water op de pijpwand wordt uitgeoefend, gegeven door de dynamische viscositeit van water vermenigvuldigd met de snelheidsgradiënt van het water aan de pijpwand, ofwel in formule vorm  $\tau = \mu \frac{du}{dr}$  (met de snelheidsgradiënt geëvalueerd op  $r = R$ ).

### Vragen

**1.** Leid een uitdrukking af voor de drukval  $\Delta p$  over de pijp als functie van de schuifspanning  $\tau$  aan de pijpwand.

**2-a.** Maak een grafiek voor de drukval over de pijp  $\Delta p$  als functie van de gemiddelde watersnelheid  $u_{ave}$ , voor het snelheidsbereik  $u_{ave} = 0m/s - 0.1m/s$ . Voor de gegevens van water, zie BINAS. (Hint: Voor het bepalen van de schuifspanning is het nodig de vorm van het snelheidsprofiel te bepalen als functie van de straal  $r$ ).

**2-b.** Waarom lukt het niet om de gehele grafiek te maken?

**3-a.** Een empirische uitdrukking voor de turbulente drukval over de pijp  $\Delta p$  wordt gegeven door

$$\Delta p = \frac{0.3164}{(Re)^{0.25}} \frac{L}{2R} \frac{1}{2} \rho u_{ave}^2 \quad (5.1)$$

Hoe ziet de grafiek er nu uit?

**3-b.** Wat is er opvallend aan deze grafiek?

---



## 6. Gletsjers en klimaat

J. Oerlemans, Universiteit Utrecht

12 punten

De lengte van vele gletsjers varieert sterk op een tijdschaal van decennia tot eeuwen. Gedurende de laatste honderd jaar zijn de grote gletsjers in de Alpen enkele kilometers korter geworden. Blijkbaar zijn gletsjers erg gevoelig voor klimaatschommelingen. We onderzoeken dit met een eenvoudig model.

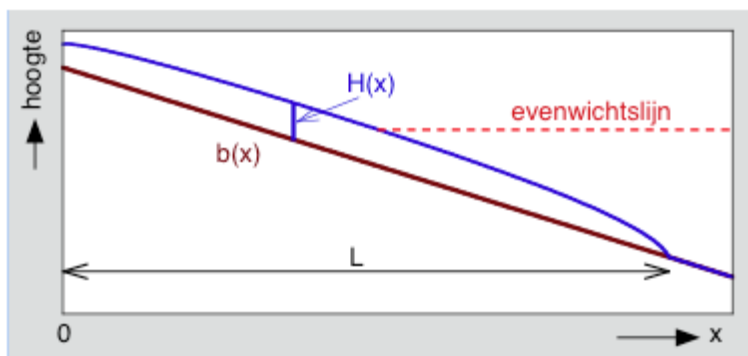


Figure 6.1

Een schematische gletsjer met lengte  $L$  ligt op een bodem met constant helling  $s$ :  $b(x) = b_0 s x$ . De hoogte van de bodem wordt gemeten ten opzichte van het zeeniveau.  $H(x)$  is de dikte van de gletsjer. De breedte van de gletsjer is constant. De specifieke massabalans  $\dot{b}(x)$  is gedefinieerd als de massa, die per jaar op een bepaald punt op de gletsjer toegevoegd wordt (of verdwijnt). Dit is dus de resultante van vele meteorologische processen, die de uitwisseling van massa tussen atmosfeer en gletsjerooppervlak bepalen (sneeuwval, rijpvorming, smelten, verdampen, enz.). We schrijven:  $\dot{b}(x) = \beta(h - E)$ , waarin  $h$  de hoogte van het oppervlak is,  $\beta$  de balansgradient is (een constante) en  $E$  de hoogte van de evenwichtslijn is (t.o.v. zeeniveau). De evenwichtslijn scheidt het accumulatiegebied van het smeltgebied.

De plastische eigenschappen van ijs zorgen ervoor, dat het produkt van gemiddelde ijsdikte en gemiddelde bodemhelling bij benadering constant is (vlakke gletsjers zijn dikker dan steile). Dus:  $s\bar{H}(x) = c$ .

1. Vindt een uitdrukking voor de evenwichtslengte van de gletsjer.
2. In de atmosfeer neemt de gemiddelde temperatuur  $T$  sterk met de hoogte af. Veronderstel dat  $E$  samenvalt met een isotherm in de atmosfeer. Leidt een uitdrukking af voor de gevoeligheid van de gletsjer voor temperatuurverandering, dat wil zeggen voor  $\frac{dL}{dT}$ . De verticale temperatuurgradient in de atmosfeer is  $\gamma$  (een constante).
3. De Aletschgletscher is met 23,5 km de langste gletsjer in de Alpen. De tong ligt op een hoogte van ongeveer 1550 m, en de hoogste bergen rond het accumulatiegebied zijn zowat 4000 m. Bereken een waarde voor  $\frac{dL}{dT}$ ; neem  $\gamma = 0.0065 K km^{-1}$ .

De Aletschgletscher is sinds 1860 ongeveer 2,8 km korter geworden. Wat zou je daaruit kunnen concluderen?

4. De Aletschgletscher heeft een breed accumulatiegebied en een smal smeltgebied. Leidt dit, in vergelijking met een gletsjer van constante breedte, tot een grotere of kleinere waarde van  $\frac{dL}{dT}$ ?

---

## 7. Fluorescence from a Single Molecule

G.A. Blab, Universiteit Utrecht

10 punten

---

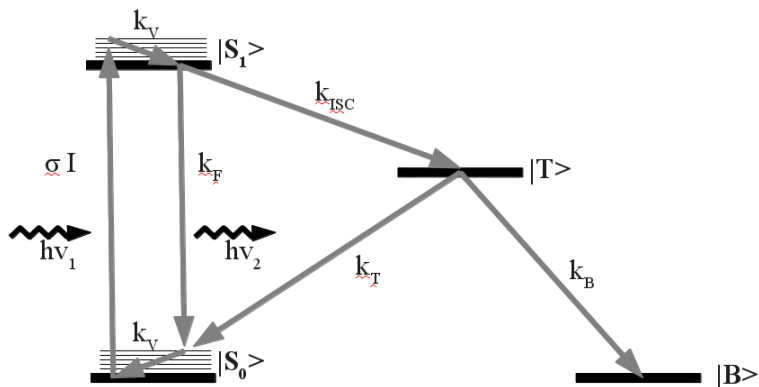


Figure 7.1: Simplified Jablonski diagram of a fluorescent molecule. A photon  $h\nu_1$  can excite the molecule from its ground state  $|S_0\rangle$  to an excited state  $|S_1\rangle$ . From there, the molecule can emit a photon with lower energy  $h\nu_2$  and go back to the ground state, or transition through a triplet (dark) state  $|T\rangle$  back to the ground state, or bleach to become a photo product  $|B\rangle$ . When asked for a numerical answer, use the following rate constants: radiative  $k_F = 3 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$ ; non-radiative  $k_V = 1 \times 10^{12} \text{ s}^{-1}$ ,  $k_{ISC} = 1 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ ,  $k_T = 2 \times 10^5 \text{ s}^{-1}$ ,  $k_{bl} = 1 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ .

**1** Find an analytical expression for the measured fluorescence life time  $\tau_F$ , that is the life time of the excited state  $|S_1\rangle$  after absorption of a photon  $h\nu_1$ . From the general expression, make the assumption  $k_V \gg k_F, k_{ISC}$ . How does this effective fluorescence life time  $\tau_F$  differ from  $(k_F)^{-1}$ ?

**2** Ignoring for the moment the irreversible bleaching, what is the expected time constant for one excitation emission cycle  $\tau_{\text{cycle}}$ ? What does this mean for the number of photons a molecule can emit per unit time? You may use the approximation  $k_{ISC} \gg k_T$  in your calculations.

**3** Find the excitation intensity (expressed in  $W\text{cm}^{-2}$ ) needed for a photon emission(!) rate of  $5 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$  from a single molecule. To find the absorption cross section  $\sigma$ , you may assume that the conditions are such that the Beer-Lambert law is valid and that the molar extinction coefficient of the fluorophore is  $\epsilon = 80\,000 \text{ M}^{-1} \text{ cm}^{-1}$  at the excitation wavelength  $\lambda_{\text{exc}} = 488 \text{ nm}$ .

---

## 8. Druppels in een cilinder

*P. van der Schoot, Technische Universiteit Eindhoven*

**11 punten**

---

In een afgesloten metalen cilinder bevinden zich  $N$  watermoleculen. De cilinder is afgesloten met een vrij beweegbare, wrijvingsloze zuiger. Buiten de cilinder heerst een druk  $p$  en een temperatuur  $T$ . Een aantal  $N_1$  van de watermoleculen is gecondenseerd in een bolvormige druppel van straal  $R$  en de rest  $N_2 = N - N_1$  bevindt zich in de cilinder in de vorm van waterdamp. Druppel en waterdamp in de cilinder blijken in thermisch en mechanisch evenwicht met de omgeving te verkeren. De straal van de druppel reageert op de buitendruk  $p$  en de buitentemperatuur  $T$ , terwijl de aantalsdichtheid van de watermoleculen in de druppel,  $\rho_1 = \frac{N_1}{V_1}$  met  $V_1$  het volume van de druppel, binnen redelijke grenzen onafhankelijk is van zowel  $p$  als  $T$ .

De straal van de druppel blijkt te voldoen aan de relatie:

$$R = \frac{2\gamma}{\rho_1 k_B T \log \frac{p(R)}{p(\infty)}} \quad (8.1)$$

waarbij  $\gamma$  de oppervlaktespanning is van de druppel en  $k_B$  de constante van Boltzmann. Verder is  $p(R)$  de druk die nodig is om bij gegeven temperatuur  $T$  een druppel van straal  $R$  waar te nemen, en  $p(\infty)$  de benodigde druk om een zeer grote (in principe oneindig grote) druppel te laten ontstaan. Dit laatste kan natuurlijk alleen als het systeem zelf ook oneindig groot is. De uitdrukking laat zien dat het in zekere zin gemakkelijker is om een grote druppel te maken dan een kleine: een grote druppel kan bestaan bij een lagere dampdruk dan een kleine. Dit heeft consequenties voor druppelgrootte in bijvoorbeeld mist.

Zelfs zonder de toestandsvergelijking van water te kennen, kan deze vergelijking thermodynamisch worden afgeleid. Beginpunt is de Gibbs vrije energie  $G$  van het water in de cilinder. Deze kan geschreven worden als:

$$G = N_1 \mu_1 + N_2 \mu_2 + 4\pi R^2 \gamma \quad (8.2)$$

waarbij  $\mu_1$  en  $\mu_2$  de chemische potentialen van het water in de druppel (7.1) en in de dampfase (7.2).

**1.** Waarom is Gibbs vrije energie de voor het probleem relevante thermodynamische potentiaal? Verklaar de verschillende bijdragen aan  $G$ , en waarom in de thermodynamische limiet de laatste term onbelangrijk wordt.

**2.** Wat zegt de tweede hoofdwet der thermodynamica over de verdeling van de watermoleculen over de damp en de druppel? Laat zien dat voor gegeven straal  $R$ , de evenwichtsverdeling van watermoleculen wordt bereikt als

$$\mu_2 = \mu_1 + \frac{2\gamma}{\rho_1 R} \quad (8.3)$$

3. Laat zien dat uit (7.3) volgt dat:

$$\frac{1}{\rho_2} = \frac{1}{\rho_1} - \frac{2\gamma}{\rho_1 R^2} \left( \frac{\delta R}{\delta p} \right)_{N_1, T} \quad (8.4)$$

4. Maak gebruik van vgl (7.4) en de plausible aannamen dat i) de waterdamp zich als een ideaal gas gedraagt en ii) er geldt dat  $\rho_2 \ll \rho_1$  om te bewijzen dat vgl (7.1) inderdaad opgaat.

---

## 9. Sneller dan het licht

*M. Scholten, Universiteit Utrecht*

**8 punten**

---

Sinds de metingen uit het CERN toch niet helemaal bleken te kloppen weten we dat er niets sneller dan het licht kan gaan. In deze opgave beschouwen wij deeltjes die toch sneller gaan dan het licht. Deeltjes kunnen dan weliswaar niet sneller dan  $c$ , maar in een medium gaat het licht niet sneller dan  $\frac{c}{n}$  en die snelheid kunnen deeltjes wel bereiken. Het blijkt dat in dat geval de deeltjes licht uitzenden onder een hoek  $\theta$ . Voor deze hoek geldt:

$$\theta = \arccos \frac{1}{\beta n} \quad (9.1)$$

met  $\beta = \frac{v}{c}$

**1.** Een voorbeeld van Cherenkovstraling is het blauwe licht dat je ziet bij waterbaden in kerncentrales. Voor water geldt:  $n = 1.33$ . Berekener of dit licht veroorzaakt wordt  $\alpha$ -deeltjes ( $M_\alpha = 3.8 \text{ GeV}/c^2$ ) of  $\beta$ -deeltjes ( $M_\beta = 0.51 \text{ MeV}/c^2$ ). Licht je antwoord toe met een berekening.

**2.** Voor de brekingsindex van lucht geldt:

$$n = 1 + aP \quad (9.2)$$

met  $a = 2.7 \times 10^{-4} \text{ atm}^{-1}$ . Wat is de minimum druk om Cherenkovstraling waar te nemen van pionen ( $M_\pi = 0.14 \text{ MeV}/c^2$ ) met  $p = 10.0 \text{ GeV}/c^2$

**3.** Met behulp van een parabolische spiegel kun je de evenwijdige stralen bundelen tot een ring, zodat de hoek vast te stellen is, en je daarmee de impuls van het deeltje vast kan stellen. Omdat de brekingindex anders is voor verschillende golflengtes treedt echter ook hier kleurschifting op. Hierdoor wordt de ring verbreed en neemt de nauwkeurigheid af. Neem aan dat de waarde van  $n - 1$  met ongeveer 2% afneemt tussen  $400 \text{ nm}$  en  $800 \text{ nm}$ . Bereken  $\frac{\Delta\theta}{\Delta p}$  en gebruik dat om in te schatten wat de onzekerheid is op de impuls van een bundel pionen met  $p = 7.0 \text{ GeV}/c^2$  onder  $P = 6 \text{ atm}$

---

---

## 10. Het Metropolis Algoritme

*K.N. Duerloo en K.K. Schakenraad, Stanford University en TU Eindhoven*

**13 punten**

---

De evenwichtseigenschappen van een systeem met een constant aantal deeltjes, constant volume en constante temperatuur  $T \neq 0$  worden vaak beschreven met behulp van de zogenaamde *Boltzmannverdeling*. Stel dat het systeem een eigenschap  $\Phi$  heeft (bv. het dipoolmoment  $p$ ). Het *ensemblegemiddelde* van  $\Phi$  over alle mogelijke toestanden (van toestand  $s_1$  tot  $s_n$ ) wordt dan gegeven door vergelijking 10.1.

$$\langle \Phi \rangle = \frac{\sum_{s_i} \Phi(s_i) \exp\left(\frac{-U(s_i)}{k_B T}\right)}{\sum_{s_i} \exp\left(\frac{-U(s_i)}{k_B T}\right)} \quad (10.1)$$

Voor eenvoudige systemen kan deze aanpak gebruikt worden om de verwachtingswaarde van een observabele  $\Phi$  te berekenen<sup>1</sup>. Echter, voor grote, ingewikkelde systemen met veel vrijheidsgraden wordt een brute krachtelevaluatie van vergelijking 10.1 nagenoeg onmogelijk. Het onderwerp van deze vraag is een Monte Carlo-methode die ons een alternatieve manier aanbiedt waarmee we de evenwichtseigenschappen van een complex thermisch systeem toch wel kunnen verkennen.

We modelleren de verdeling van partiële ladingen op een lineair molecuul met een één-dimensionale opstelling bestaande uit een constant aantal van  $2N+1$  deeltjes. Elk deeltje heeft een unieke, gehele lading tussen  $-N$  en  $+N$ . Deze deeltjes nemen ook elk een unieke positie  $n$  in op één van de  $2N+1$  equidistante punten die lopen van  $n = -N$  tot  $n = N$ . Een toestand van dit systeem wordt dus volledig beschreven door de discrete functie die aan elke positie  $n$  een unieke lading toewijst,  $q : n \rightarrow q[n]$  waarbij  $n$  én  $q[n] \in \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\}$ . Een voorbeeld van zo'n ladingenpermutatie is gegeven in Tabel 1.

Table 1: Eén van de bijna 40 miljoen mogelijke toestanden voor een systeem met  $N = 5$ :

$n$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$q[n]$	4	0	-3	2	5	-4	1	-2	-1	-5	3

Onder een extern aangelegd elektrisch veld  $E$  kan de totale energie  $U_q$  van een permutatie  $q[n]$  berekend worden met een quasi- $1/r$  wet zoals in vergelijking 10.2.

$$U_q = \frac{C}{2} \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m \neq n} \frac{q[n]q[m]}{|m-n|} - D \sum_{n=-N}^{n=N} nq[n]E \quad (10.2)$$

Waarbij  $C$  en  $D$  positieve constanten zijn.

---

<sup>1</sup> $\langle \Phi \rangle$  is niet voor alle systemen gelijk aan het *tijds*gemiddelde van  $\Phi$ . In deze vraag mag je daar echter wel van uit gaan.

**1-a.** Voor  $E = 0$  en een willekeurige  $N \geq 2$ , geef een permutatie  $q[n]$  die hoort bij de laagst mogelijke  $U_q$ . Dit mag als een expliciet voorschrift ( $q[n] =$  functie van  $n$ ) of op een andere duidelijke manier gegeven worden. Je hoeft enkel  $q[n]$  te geven, zonder bewijs.

**1-b.** Is deze  $q[n]$  uniek? Indien nee, hoeveel rijtjes bestaan er die deze laagste energie hebben?

**2.** De noemer in vergelijking 10.1 wordt ook wel eens de partitiefunctie  $Z$  genoemd:

$$Z = \sum_{\text{alle permutaties}} \exp\left(\frac{-U_q}{k_B T}\right) \quad (10.3)$$

De tijd die nodig is om  $Z$  numeriek te berekenen schaalst zeer snel met toenemende  $N$ . Stel dat  $N = 100$ . Op dit moment kan de meest krachtige supercomputer ter wereld ongeveer  $11 \cdot 10^{15}$  operaties (+, -, /,  $\times$ , absolute waarde, tekenwissel) per seconde uitvoeren. Schat hoe lang deze computer erover zou doen om  $Z$  uit te rekenen. Ga ervan uit dat een e-macht 16 operaties in beslag neemt. Antwoord met een getal in wetenschappelijke notatie.

Een probleem met de brute-kracht aanpak van vergelijking 10.1 is dat we eisen dat elke mogelijke permutatie wordt meegenomen in de berekening, ongeacht hoe energetisch (lees: onwaarschijnlijk) deze is. Het Metropolis algoritme is in essentie een bijgestuurde *random walk* die binnen de thermisch toegankelijke toestanden blijft door voorgestelde energieafnamen altijd te accepteren en energie-toenamen *soms* te accepteren, met acceptatiekans  $\omega(q \rightarrow q') = \exp\left(-\frac{U_{q'} - U_q}{k_B T}\right)$ . Zodoende convergeert dit algoritme snel op het fysische gedrag van het systeem na een aantal iteraties  $K$ . Toegepast op onze simulatie:

Begin in een willekeurige permutatie  $q[n]$

**for**  $i = 0$  to  $K$  **do**

$\epsilon \leftarrow$  willekeurig geheel getal  $\in \{-N, -N + 1, \dots, N - 1, N\}$

$\delta \leftarrow$  willekeurig geheel getal  $\in \{-N, -N + 1, \dots, N - 1, N\} \setminus \{\epsilon\}$

Bouw een hypothetische permutatie  $q'[n]$  met inversie van  $\epsilon$  en  $\delta$ :

$q'[n] \leftarrow q[n]$  voor alle  $n$  behalve  $\epsilon$  en  $\delta$

$q'[\delta] \leftarrow q[\epsilon]$

$q'[\epsilon] \leftarrow q[\delta]$

**if**  $U_{q'} \leq U_q$  **then**

$q[n] \leftarrow q'[n]$  voor alle  $n$

$\triangleright$  Accepteert de nieuwe permutatie

**else**

Met kans  $\exp\left(-\frac{U_{q'} - U_q}{k_B T}\right) \Rightarrow q[n] \leftarrow q'[n]$  voor alle  $n$

**end if**

$\Phi[i] \leftarrow \Phi_q$

**end for**

Bereken  $\langle \Phi \rangle \leftarrow \frac{1}{K} \sum_{i=1}^K \Phi[i]$



**3.** Wanneer  $K \rightarrow \infty$  bereikt de simulatie een evenwicht in de kansverdeling tussen de mogelijke permutaties. Laat zien dat deze verdeling consistent is met de Boltzmann-verdeling.

Je programmeert deze simulatie voor een rijtje met  $N = 100$ , en je merkt dat de simulatie traag maar zeker convergeert op een  $\langle \Phi \rangle$ . Een collega die zelf even niets te doen heeft geeft je het volgende advies: je zult sneller door de toegankelijke toestanden lopen als je in de plaats van één inversie, twee inversies toepast bij het bouwen van de hypothetische permutatie  $q'[n]$ :

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &\leftarrow \text{willekeurig geheel getal} \in \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\} \\ \delta_1 &\leftarrow \text{willekeurig geheel getal} \in \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\} \setminus \{\epsilon_1\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q''[n] &\leftarrow q[n] \text{ voor alle } n \text{ behalve } \epsilon_1 \text{ en } \delta_1 \\ q''[\delta_1] &\leftarrow q[\epsilon_1] \\ q''[\epsilon_1] &\leftarrow q[\delta_1]\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_2 &\leftarrow \text{willekeurig geheel getal} \in \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\} \\ \delta_2 &\leftarrow \text{willekeurig geheel getal} \in \{-N, -N+1, \dots, N-1, N\} \setminus \{\epsilon_2\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}q'[n] &\leftarrow q''[n] \text{ voor alle } n \text{ behalve } \epsilon_2 \text{ en } \delta_2 \\ q'[\delta_2] &\leftarrow q''[\epsilon_2] \\ q'[\epsilon_2] &\leftarrow q''[\delta_2]\end{aligned}$$

Je collega heeft gelijk: de simulatie convergeert nu meer dan dubbel zo snel als tevoren! Helaas is deze aanpak niet vrij van problemen.

**4-a.** Leg uit waarom je met de suggestie van je collega mogelijk geen juiste resultaten krijgt voor  $\langle \Phi \rangle$ .

**4-b.** Hoe kun je de suggestie van je collega aanpassen zodat je simulatie sneller convergeert, maar zonder het probleem uit **4-a**?

In het Metropolis algoritme lijkt de entropie  $S$  van het systeem helemaal geen rol te spelen. We beschouwen in de acceptatiekans immers alleen de energie  $U$  van de toestanden, niet de entropie. Echter, we weten dat entropie van centraal belang is als we gedrag op  $T \neq 0$  willen analyseren.

**5.** Leg kort uit waarom  $S$  toch impliciet wordt opgenomen in de simulatie.

---

## 11. Sterrenwind

*M. Scholten, Universiteit Utrecht*

**8 punten**

---

De zon straalt veel uit. Naast licht, dat deze aarde van energie voorziet schiet de zon ook een hoop deeltjes met hoge snelheid de ruimte in; de zonnwind. Deze wind is onder andere verantwoordelijk voor de staart van kometen, en het noorder- en zuiderlicht op Aarde. In deze opgave stellen wij hier een model voor op.

**1.** Neem aan dat de deeltjes zich radieel van de zon af bewegen, en dat de zon sferisch symmetrisch is. Stel een relatie tussen de snelheid  $V$  en de straal  $r$ , voor het gebied waarin de wind niet meer in massa toeneemt.

Gebruik hierbij de wet van Bernoulli:

$$\frac{1}{2}V^2(r) + \frac{\gamma P(r)}{(\gamma - 1)\rho(r)} + \Phi(r) = \text{constant} = \varepsilon \quad (11.1)$$

met  $\Phi$  de gravitatiepotentiaal en gebruik een andere behouden grootte. Schrijf je antwoord met gebruik van de adiabatistische geluidssnelheid.

$$C_s = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}} \quad (11.2)$$

Waarbij  $\gamma$  volgt uit de adiabatistische gaswet:

$$P(r) = \text{constant} \times \rho^\gamma(r) \quad (11.3)$$

Tip: Schrijf de wet van Bernoulli in differentiaalvorm.

**2.** De vergelijking die je nu hebt gevonden is de Parkervergelijking. Welke twee problemen loop je op als je deze vergelijking probeert op te lossen?

**3.** Bedenk hoe deze problemen vermeden kunnen worden en gebruik dit om een vergelijking op te stellen voor het massaverlies per tijdseenheid.

---

## 12. Bepaling van de gemiddelde grootte van poriën in een filter

A. H. Mooldijk, Universiteit Utrecht

12 punten

---

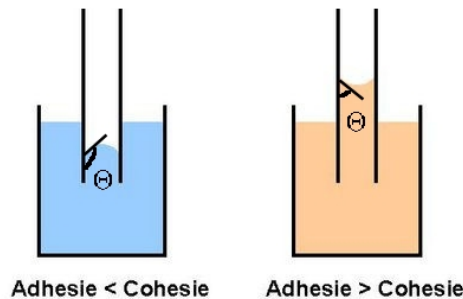


Figure 12.1: Verschil tussen adhesie en cohesie

Als je een koffiefilter in water plaatst, lijkt het water wel omhoog gezogen te worden! Dit komt door de zogenaamde capillaire werking. Moleculen trekken elkaar aan als ze dicht bij elkaar zijn. Dit noemen we de vanderwaalskrachten. Bij vloeistofmoleculen onderling noemen we dit cohesie. Er zijn echter ook aantrekkende krachten tussen de watermoleculen en de moleculen van de vaste stof waar een vloeistof aan raakt (adhesie). Cohesie probeert een vloeistof bol te maken, adhesie trekt juist de vloeistof omhoog. Welke kracht sterker is, zie je onder meer aan de hoek  $\theta$  tussen vloeistofoppervlak in een capillair en de wand van het capillair. Als de hoek kleiner is dan  $90^\circ$  wordt water omhoog getrokken. Dit verschijnsel zorgt er onder meer voor bij bomen dat het water hoger dan  $10m$  komt. Ook bij koffiefilters of bij het scheiden van stoffen bij scheikunde (chromatografie) wordt dit verschijnsel gebruikt. Er kan worden gesteld dat voor het omhoog kruipen van water in poreus materiaal geldt:

$$h^2 = ct \text{ waarbij geldt dat } c = \frac{D\gamma}{\eta}$$

Met:

$D$  de gemiddelde gatdiameter van het poreuze materiaal,

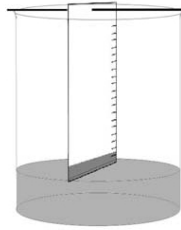
$\gamma$  de oppervlaktespanning,

$\eta$  de viscositeit (die van  $(20^\circ C)$  gelijk is aan  $(1,0 \pm 0,1) \cdot 10^{-3} Pa \cdot s$ ).

$h$  en  $t$  zijn respectievelijk de hoogte van opgezogen water en het tijdstip.

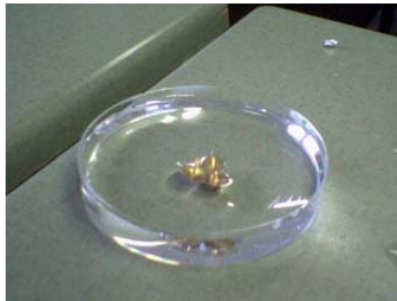
Voor oppervlaktespanning geldt:

Oppervlaktespanning is het gevolg van de vanderwaalskracht tussen moleculen in de vloeistof-fase. Voor moleculen aan het oppervlak is de netto kracht naar de vloeistof toe gericht. Dit is het gevolg van het feit dat slechts vanuit de vloeistof aantrekkingskracht op de buitenste moleculen wordt uitgeoefend. Binnen de vloeistof wordt de kracht van alle kanten uitgeoefend waardoor die elkaar opheffen. De eenheid voor oppervlaktespanning is Newton per



meter, [ $N \cdot m^{-1}$ ]. Bij een voorwerp op een vloeistof treedt de oppervlaktespanning op langs het grensvlak van vloeistof, voorwerp en lucht, bij de omtrek dus. De oppervlaktespanning houdt een punaise drijvend. De oppervlaktespanning kun je dus definiëren als de kracht per lengte-eenheid, zoals de eenheid al aangeeft.

Door een punaise op water te leggen en te bepalen met welke belasting deze zinkt, is de oppervlaktespanning te bepalen.



### Opdracht

Voor dit experiment hebben we drie opdrachten:

1. Onderzoek of inderdaad  $h^2$  evenredig is met  $t$  en bepaal  $c$ .
2. Bepaal de oppervlaktespanning.
3. Bepaal met de bepaalde en gegeven waarden de gemiddelde grootte van de gatdiameter in de koffiefilter.

## **Materiaal**

Je hebt het volgende materiaal tot je beschikking:

- Statiefmateriaal met krokodillenklem
- Stukjes filtreerpapier van *2cm* bij *10cm*
- Satéprikker
- Potlood
- Liniaal of geodriehoek
- Petrischaal en water
- Stopwatch
- Punaises
- Schuifmaat
- Aluminiumfolie