



**PION  
2012**

**Antwoorden**

**UTRECHT**

Sponsors:



---

## Inhoudsopgave

---

1.	Maxwells inzicht	2
2.	Geluidsoverlast	3
3.	Thermo-elektrisch transport en opwarming	4
4.	Een roterende cilinder	5
5.	Stroming in een pijp	6
6.	Gletsjers en klimaat	9
7.	Fluorescence from a Single Molecule	10
8.	Druppels in een cilinder	12
9.	Sneller dan het licht	13
10.	Het Metropolis Algoritme	15
11.	Sterrenwind	18
12.	Bepaling van de gemiddelde grootte van poriën in een filter	19

### Colofon

Dit antwoordenboekje is een uitgave van de  
PION-commissie 2012.  
*e-mail:* pion@a-eskwadraat.nl  
*internet:* pion.a-eskwadraat.nl

---

**1. Maxwells inzicht**

*M. Vreeswijk, Universiteit van Amsterdam*

**10 punten**

---

1. Bolvormig oppervlak rond oorsprong tekenen. E veld staat er loodrecht op,

$$\text{Dus, } \oint d\vec{\sigma} \cdot \vec{E} = E \oint d\vec{\sigma} = E4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0}$$

$$\vec{E} = e^{-t/\tau} \frac{Q_0 \vec{r}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \text{ Denk om de vectornotatie!}$$

2.  $I = \frac{Q_0}{\tau} e^{-t/\tau} \vec{J} = \frac{Q_0}{\tau} \frac{e^{-t/\tau} \vec{r}}{4\pi r^3}$  Let op de eenheidsvector:  $\frac{\vec{r}}{r}$

3. Stel dat er wel ergens een magneetveld is. Dan neem ik de hele opstelling en draai die 180 graden over een as door dat punt en de oorsprong zodat het magneetveld de andere kant op wijst. Echter, fysisch is er niets veranderd en dat is inconsistent: het kan alleen als het magneetveld nul is.

4. Door het getekende ampèrelusje wordt stroom omsloten. Dus  $B \cdot dl$  zou NIET nul moeten zijn (alsof er toch een magneetveld is).

5.  $\oint_{\text{kring}} B \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{omsloten}}$  (wet van Ampère)  $\rightarrow \mu_0 I_{\text{omsloten}} + \mu_0 \epsilon_0 \int_{\text{oppervlak}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{\sigma}$  (met

Maxwell's toevoeging)

$$\oint_{\text{kring}} B \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{omsloten}} + \mu_0 \epsilon_0 \int_{\text{oppervlak}} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \cdot \vec{\sigma} =$$

$$\mu_0 \int_{\text{oppervlak}} \left( \vec{J} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{\sigma} = \mu_0 \int_{\text{oppervlak}} \left( \frac{Q}{\tau} \frac{e^{-t/\tau} \vec{r}}{4\pi r^3} - \epsilon_0 \frac{Q}{\tau} \frac{e^{-t/\tau} \vec{r}}{4\pi \epsilon_0 r^3} \right) = 0$$

---

## 2. Geluidsoverlast

Hans Jordens, Universiteit Groningen

9 punten

---

1. Bij een bewegende bron en een stilstaande waarnemer wordt de verschuiving van de frequentie gegeven door

$$f_w = \frac{f_0}{1 - \frac{v \cos(\phi)}{c}}, \quad (2.1)$$

waarin  $\phi$  de hoek is tussen de verbindingslijn van de waarnemer en de bron met de bewegingsrichting van de bron. Voor grote afstanden geldt:  $\phi = 0$ .

Uit de grafiek volgt:

$$1770 = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} \quad (2.2)$$

en

$$700 = \frac{f_0}{1 + \frac{v}{c}}. \quad (2.3)$$

Delen levert:

$$\frac{1770}{700} = \frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}, \quad (2.4)$$

waaruit volgt dat  $v = 149ms^{-1}$ .

2. Vul de gevonden  $v$  in vergelijking 2.2 . Dit levert  $f_0 = 1003Hz$  op.

3. Als het vliegtuig precies overhead is ( $\phi = \pi/2$ ), is de waargenomen frequentie  $f_w = f_0$ . De verandering van de frequentie per seconde wordt gegeven door:

$$\frac{df_w}{dt} = \frac{-f_0}{\left(1 - \frac{v \cos(\phi)}{c}\right)^2} \frac{v}{c} \sin(\phi) \frac{d\phi}{dt} \Big|_{\phi=\pi/2} = -f_0 \frac{v^2}{ch}, \quad (2.5)$$

aangezien  $\frac{d\phi}{dt} = \frac{v}{h}$ . Bij  $f_w = f_0 = 1003Hz$  is de helling van de grafiek  $205Hzs^{-1}$ , zodat  $h = 317m$ . Dit komt overeen met 1040ft. Het vliegtuig houdt zich dus - net - aan de minimumhoogte.

4. Pas 12 seconden na het waarnemen van vliegtuig werd voor het eerst geluid gehoord. De afgelegde weg van het geluid is  $s = 342 * 12 = 4116m$ . De horizontale afstand is dan  $x = \sqrt{s^2 - h^2} = 4100m$ .

---

### 3. Thermo-elektrisch transport en opwarming

*R.A. Duine, Universiteit Utrecht*

**11 punten**

---

**1. en 2.** De totale entropieverandering van het systeem per tijdseenheid is

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS_L + dS_R}{dt} = \frac{1}{T_L} \frac{dU_L}{dt} + \frac{1}{T_R} \frac{dU_R}{dt} - \frac{\mu_L}{T_L} \frac{dN_L}{dt} - \frac{\mu_R}{T_R} \frac{dN_R}{dt}. \quad (3.1)$$

Hierbij verwijzen de subscripts naar het Linker- of Rechterreservoir.

Gebruik nu dat  $dU_L = -dU_R \equiv -dU$  (energiebehoud van het totaal) en dat  $dN_L = -dN_R \equiv -dN$  (deeltjesbehoud van het totaal). Voorts is  $T_L = T + \Delta T$  en  $T_R = T$ , en  $\mu_L = -|e|(V + \Delta V)$  en  $\mu_R = -|e|V$  (waarbij  $-|e|$  de lading van het elektron).

Lineariseer nu de vergelijking voor kleine  $\Delta V$  en  $\Delta\mu$  en gebruik dat  $I = |e|\frac{dN}{dt}$ , en  $I_Q = -\frac{dU}{dt} + \mu\frac{dN}{dt}$  (de tweede term in  $I_Q$  heeft het “verkeerde” teken omdat de warmte van links naar rechts gaat maar de elektronen omgekeerd...). Het nu invullen van de relaties tussen  $I$ ,  $I_Q$  en  $\Delta V$ ,  $\Delta T$ , en gebruiken dat  $\frac{dS}{dt} = T\frac{dQ}{dt}$  geeft het resultaat bij onderdeel 2.

**3.** Schrijf het resultaat van onderdeel 2 als:

$$\frac{dQ}{dt} = \left(\Delta V, -\frac{\Delta T}{T}\right) \begin{pmatrix} 1/R & ST/R \\ P/R & \kappa'/T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta\mu \\ -\frac{\Delta T}{T} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Volgens de tweede hoofdwet is  $dS \geq 0$  waaruit volgt  $dQ/dt \geq 0$ . Aan dit laatste is voldaan als de determinant van bovenstaande  $2 \times 2$ -matrix  $\geq 0$ . Hieruit volgt het antwoord.

---

#### 4. Een roterende cilinder

*J. van Dongen en D. Dieks, Universiteit Utrecht*

**10 punten**

---

**1.** Een waarnemer in het ruststelsel, die werkt met meetstokken die ten opzichte van hem rusten, meet dat de rand van de bewegende cilinder een cirkel is met gelijk gebleven straal  $R$ , en dus met gelijk gebleven omtrek  $2R$ . Een met de cilinder meebewegende waarnemer, die meetstokken gebruikt die ten opzichte van hem rusten, vindt ook  $R$  voor de straal. Immers, meetstokken in de radiële richting bewegen loodrecht op hun lengte en ondergaan dus geen Lorentz-contractie. Maar de meetstokken die worden neergelegd langs de omtrek krimpen wel ten opzichte van de meetstokken in het laboratoriumstelsel. Daarom kan de meebewegende waarnemer langs de omtrek meer meetstokken neerleggen dan de rustende waarnemer. De meebewegende waarnemer vindt dus  $O' > 2R'$ . Op de bewegende cilinder geldt dus geen Euclidische meetkunde!

**2.** Je bent geneigd te denken dat de rand van de cilinder (de omtrek van de cirkel) moet krimpen door de Lorentz-contractie; maar het antwoord onder **1.** zegt juist dat de rand langer wordt.

**3.** Door de draaiing krijgen de elementen van de cilinder langs de rand een snelheid in hun eigen lengterichting, en ze “willen” dus inkrimpen. Maar doordat ze zitten ingeklemd in het geheel van de cilinder kan dat niet. De elementen langs de rand worden daarom uitgerekt ten opzichte van hun natuurlijke lengte (dit is de Lorentz-gecontraheerde lengte): deze uitrekking is verantwoordelijk voor de toename van de omtrek. De uitrekking zal leiden tot het ontstaan van spanningen in het materiaal van de cilinder. Let op het verschil met de meebewegende meetstokken: deze zitten niet vast aan de cilinder, en kunnen wél vrij inkrimpen.

---

## 5. Stroming in een pijp

Han Velthuis, TNO Fluid Dynamics

8 punten

---

1. Beschouw de cilinder van water met lengte  $L$  en radius  $R$ . Uit een krachtenbalans in axiale richting volgt dat de schuifkracht (schuifspanning over de cilindermantel geïntegreerd) in balans moet zijn met het verschil in drukkracht uitgeoefend over de cilinderuiteinden. Ofwel:

$$\Delta p \pi R^2 = 2\pi R L \tau \quad (5.1)$$

$$\Delta p = \frac{2L \tau}{R} \quad (5.2)$$

2. We willen bepalen  $\Delta p = \frac{2L \tau}{R}$  met daarin ingevuld  $\tau = \mu \frac{du}{dr}$  met daarin ingevuld  $r = R$ . Hiervoor moeten we de vorm van het snelheidsprofiel bepalen als functie van de straal  $r$ . Vervolgens moeten we dit snelheidsprofiel differentiëren naar  $r$ , om de schuifspanning te bepalen.

We beginnen met het bepalen van het laminaire snelheidsprofiel en het turbulente snelheidsprofiel. Het laminaire snelheidsprofiel is een parabool, met zoals gezegd snelheid nul aan de wand, en maximale snelheid in het midden. De vorm wordt dus gegeven door (met  $C$  een constante):

$$u_{lam} := C \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \quad (5.3)$$

De constante  $C$  volgt uit het feit dat het snelheidsprofiel geïntegreerd over de pijpdoorsnede gelijk moet zijn aan de gemiddelde snelheid maal het oppervlak van de buisdoorsnede:

$$\int_0^R 2\pi R \left( C \left( 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right) \right) dr = u_{ave} \pi R^2 \quad (5.4)$$

Hieruit volgt  $C = 2u_{ave}$ . Bepaal nu de snelheidsgradiënt aan de wand. Hiervoor moeten we de afgeleide van het snelheidsprofiel nemen naar  $r$  en evalueren op  $r = R$ :

$$\frac{du}{dr} = \frac{4u_{ave}}{r} \quad (5.5)$$

Hiermee wordt de uitdrukking voor de drukval als functie van gemiddelde watersnelheid in het laminaire geval

$$\Delta p_{lam}(u_{ave}) := \frac{2L(\mu \frac{4u_{ave}}{R})}{R} \quad (5.6)$$

Het turbulente snelheidsprofiel wordt gegeven door (met  $C$  een constante):

$$y = R - r \quad (5.7)$$

$$u_{tur} = C \left( \frac{R - r}{R} \right)^{\frac{1}{7}} \quad (5.8)$$

Bepaal nu de constante  $C$ . Deze volgt uit wederom de eis dat het snelheidsveld geïntegreerd over de buisdoorsnede weer moet opleveren  $u_{ave}$  maal het oppervlak:

$$\int_0^R 2\pi R \left( C \left( \left( \frac{R-r}{R} \right)^{\frac{1}{7}} \right) \right) dr = u_{ave} \pi R^2 \quad (5.9)$$

Hieruit volgt  $C = \frac{60}{49} u_{ave}$ .

Voor het bepalen van de schuifspanning aan de wand moeten we het snelheidsprofiel differentiëren naar  $r$ :

$$\frac{du}{dr} = \frac{60u_{ave}}{343R \left( \frac{R-r}{R} \right)^{\frac{6}{7}}} \quad (5.10)$$

Echter als we invullen  $r = R$  dan volgt hieruit een oneindige snelheidsgradiënt (schuifspanning) aan de wand. Dit is niet realistisch. Het opgegeven turbulente snelheidsprofiel geeft dan misschien globaal wel een goede indruk, maar aan de wand gaat het mis. (ANTWOORD B)

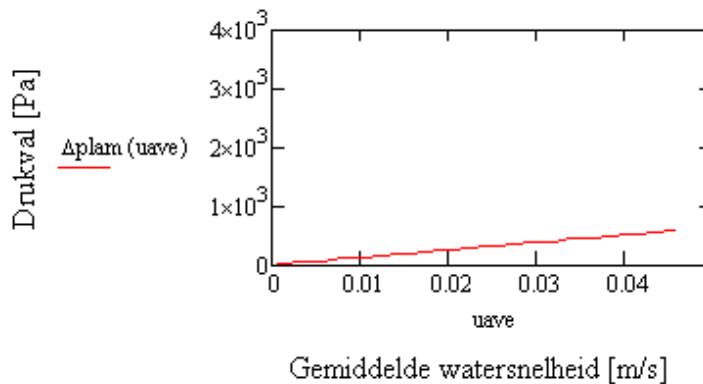
Het grafiekje voor de drukval als functie van gemiddelde watersnelheid kunnen we dus maar gedeeltelijk maken, dat wil zeggen we hebben enkel maar een uitdrukking gevonden voor de laminaire drukval.

De laminaire drukval geldt tot de kritieke (gemiddelde) water snelheid  $u_{trans}$  waarbij de laminair/turbulent overgang optreedt. Deze volgt uit de waarde voor de het kritische Reynoldsnummer (met  $\mu = 0.001 Pa \cdot s$  en  $\rho = 1000 kg/m^3$  uit BINAS):

$$Re = \frac{\rho u_{trans} 2R}{\mu} = 2300 \quad (5.11)$$

$$u_{trans} := \frac{1150\mu}{R\rho} = 0.046 m/s \quad (5.12)$$

Hiermee wordt het grafiekje (ANTWOORD A):



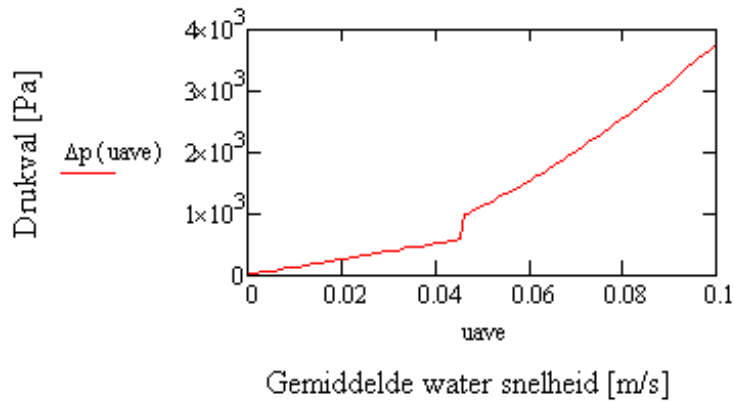


**3-a.** Met de empirische drukval voor het turbulente geval wordt de grafiek:

$$\Delta p(u_{ave}) = \Delta p_{lam}(u_{ave}) \text{ als } \frac{\rho u_{ave} 2R}{\mu} < 2300 \quad (5.13)$$

$$\Delta p(u_{ave}) = \Delta p_{emp}(u_{ave}) \text{ elders} \quad (5.14)$$

$u_{ave} := 0\text{m/s}, 0.001\text{m/s} \dots 0.1\text{m/s}$



**3-b.** Wat opvalt is de sprong in drukval bij de overgang van laminaire naar turbulente stroming ( $u \approx 0.046\text{m/s}$ ). Deze treedt in werkelijkheid ook op, alhoewel het punt van omslag in de praktijk binnen zekere omstandigheden kan variëren, afhankelijk van bijvoorbeeld de pijpruwheid of andere verstoringen.

Daarnaast valt op de drukval in het laminaire gebied lineair toeneemt met de gemiddelde snelheid, en in het turbulente gebied bijna kwadratisch.

---

## 6. Gletsjers en klimaat

*J. Oerlemans, Universiteit Utrecht*

**12 punten**

---

1. Het totale massabudget van de gletsjer is nul als:

$$\int_0^L \dot{b}(x) dx = \beta \int_0^L (H(x) + b_0 - sx - E) dx = 0 \quad (6.1)$$

Hieruit volgt:

$$L = 0 \text{ of } L = \frac{2(\bar{H}(x) + b_0 - E)}{s} \quad (6.2)$$

Dus volgt uit  $s\bar{H}(x) = c$ :

$$L = 0 \text{ of } L = \frac{2(\frac{c}{s} + b_0 - E)}{s} \quad (6.3)$$

2. Antwoord volgt uit vermenigvuldiging met  $\frac{dE}{dE}$ :

$$\frac{dL}{dT} = \frac{\partial L}{\partial E} \frac{dE}{dT} = \frac{2}{\gamma s} \quad (6.4)$$

3. De gemiddelde helling van de Aletschgletscher is:

$$s = \frac{(4000 - 1550)}{23500} = 0.104 \quad (6.5)$$

Dus:

$$\frac{dL}{dT} = \frac{-2}{0.0065 \times 0.104} = -2959 mK^{-1} \quad (6.6)$$

De terugtrekking van de gletsjertong zou dus verklaard kunnen worden door een temperatuurstijging van 1.057 K (als de gletsjer altijd in evenwicht zou zijn met het klimaat, wat niet erg waarschijnlijk is).

4. Als de evenwichtslijn stijgt neemt het oppervlak van het accumulatiegebied af. Omdat het ablatiegebied smaller is, is een grotere lengteverandering nodig om een even grote afname van het oppervlak van het ablatiegebied te verkrijgen. De waarde van  $\frac{dL}{dT}$  is dus groter.

---

## 7. Fluorescence from a Single Molecule

G.A. Blab, Universiteit Utrecht

10 punten

---

a) The state equations are

$$\dot{n}_1 = -k_V n_1, \quad n_1(0) = 1 \Rightarrow n_1 = e^{-k_V t}$$

$$\dot{n}_2 = k_V n_1 - \underbrace{(k_F + k_{ISC})}_{k_{\text{total}}} n_2, \quad n_2(0) = 0 \Rightarrow n_2 = k_V e^{-k_V t} - k_{\text{total}} n_2.$$

Trying the general solution  $C(t)e^{-k_{\text{total}}t}$  (variation of parameters) for the inhomogeneous differential equation for  $n_2$  leads to

$$n_2(t) = \frac{k_V}{k_V - k_{\text{total}}} \left( e^{-k_{\text{total}}t} - e^{-k_V t} \right)$$

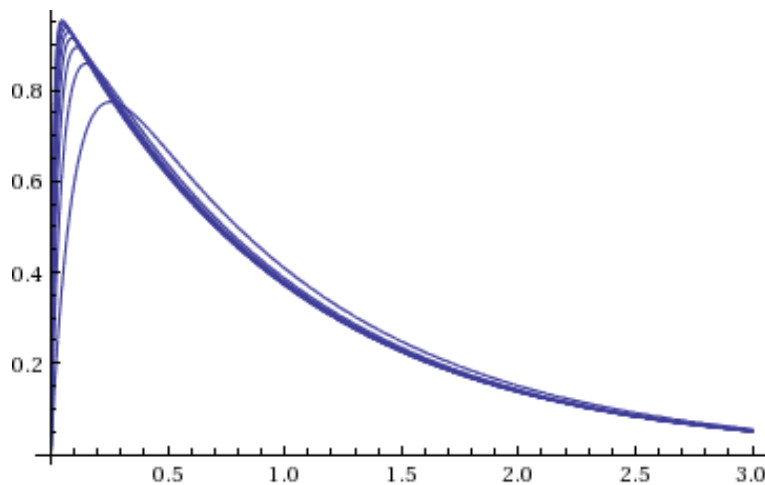


Figure 7.1: Decay curves of  $|S_1\rangle$  for  $k_V = k_{\text{total}}$  (lowest curve) to  $k_V = 100k_{\text{total}}$ . The exponential time constant  $\tau_F$  after the initial rise/spike is always the same.

As  $k_V \gg k_{\text{total}}$ , the exponential decay will be determined only by the latter (see figure 7.1, thus  $\tau_F = (k_{\text{total}})^{-1} = 3.23 \text{ ns} < (k_F)^{-1}$ . Even if a decay channel does not contribute to fluorescence, it will shorten the apparent fluorescent life time!

b) We now have two decay channels from  $|S_1\rangle$  into  $|S_0\rangle$ . One direct with a probability  $k_F/k_{\text{total}}$  and a life time  $\tau_F$ , and one indirect with probability  $k_{ISC}/k_{\text{total}}$  via the triplet state  $|T\rangle$ . The effective life time  $\tau_T$  (following the argument in the first part and ignoring the bleaching) is  $1/k_T$ . The expected time for one cycle is the weighted mean, or

$$\tau_{\text{cycle}} = \frac{k_F \tau_F + k_{ISC} \tau_T}{k_{\text{total}}} = \tau_F \left( 1 + \frac{k_{ISC}}{k_T} \right) = 51 \tau_F = 165 \text{ ns}$$

The cycle time limits the number of photons that can be emitted by a single molecule to  $6.078 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ .

- c) We are safely below the maximal number of photons, so we can ignore saturation. First we need to calculate the number of absorption events needed for the target emission rate. We have seen that the probability of a fluorescent decay from  $|S_1\rangle$  is  $k_F/k_{\text{total}}$ , or

$$\sigma I = \frac{k_{\text{total}}}{k_F} \cdot 5 \times 10^4 \text{ s}^{-1} = 51\,667 \text{ s}^{-1}$$

$I$  is the intensity density in photons per second and square centimetre, and each photon carries an energy of  $E = h\nu = \frac{hc}{\lambda}$ . To get from the absorption coefficient  $\epsilon$  to the cross section  $\sigma$ , we use the Beer-Lambert absorption law

$$\frac{I}{I_0} = e^{-\sigma l N} = 10^{-\epsilon l c} \Rightarrow \sigma = \frac{1000 \ln 10}{N_A} \epsilon$$

where  $N$  is the particle density (per cubic centimetres),  $c$  the molar concentration (note: molar are per cubic decimetres!), and  $N_A$  is Avogadro's constant  $6.022 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ . The cross section of one molecule is then  $\sigma = 3.06 \times 10^{-16} \text{ cm}^2$ . The intensity density has to be  $1.69 \times 10^{20} \text{ s}^{-1}$ , one photon at 488 nm carries an energy of  $4.071 \times 10^{-19} \text{ J}$ , therefore we need an excitation intensity of  $68.7 \text{ W/cm}^2$ . (note: as a laser focus in a microscope is only on the order of a micrometre, this translates into several microwatts of actual power!)

---

## 8. Druppels in een cilinder

*P. van der Schoot, Technische Universiteit Eindhoven*

**11 punten**

---

1. Omdat het aantal deeltjes  $N$  vastligt, de druk  $p$  en de temperatuur  $T$ . Door een Legendre-transformatie van de interne energie  $E$ , de relevante thermodynamische potentiaal van een gesoleerd systeem  $E = E(S, N, V)$  met  $V$  het volume van het systeem en  $S$  de entropie, verkrijgen we  $G = G(T, N, p) = E - ST + pV$  de Gibbs vrije energie.

Volgens de thermodynamica geldt extensiviteit,  $G = G_1 + G_2$ . waarbij verder nog in evenwicht geldt dat  $G = \mu N$ . Alleen moeten we nog rekening houden met het bestaan van een grensvlak ertussen de deelsystemen 1 en 2, en de vrije energie die dat kost is gelijk aan  $\gamma A$  met  $A$  het oppervlak tussen de deelsystemen. Omdat het een bolvorming oppervlak betreft, geldt  $A = 4\pi R^2$ .

In de thermodynamische limiet geldt  $N_1, N_2 \rightarrow \infty$  bij een vaste verhouding  $\frac{N_1}{N_2}$ . Aangezien  $A$  groeit met  $N_1^{\frac{2}{3}}$  verliest de laatste bijdrage aan invloed in die limiet.

2. Volgens de tweede hoofdwet minimaliseert de verdeling van de watermoleculen over druppel en damp de Gibbs vrije energie.

Merk op dat  $N$  behouden is, dus voor variaties in deeltjesaantallen geldt  $\delta N_1 = -\delta N_2$ . Kortom

$$\delta G = \mu_1 \delta N_1 - \mu_2 \delta N_1 + 8\pi\gamma R \left( \frac{\delta R}{\delta N_1} \right) \delta N_1 \quad (8.1)$$

Omdat de dichtheid van de vloeistof  $\rho_1$  constant wordt geacht te zijn, is het handig om gebruik te maken van de relatie

$$\rho_1 = \frac{3N_1}{4\pi R^3} \quad (8.2)$$

De eis dat:  $\frac{\delta G}{\delta N_1} = 0$  geeft dan automatisch de gewenste uitdrukking. Merk op dat in evenwicht nu kennelijk niet geldt dat  $\mu_1 = \mu_2$ . Dit geldt enkel in de thermodynamische limiet.

3. Er geldt volgens de thermodynamica dat voor elk van de fasen

$$dG = -SdT + Vdp + \mu dN \quad (8.3)$$

omdat

$$dE = TdS - pdV + \mu dN \quad (8.4)$$

Hieruit volgt dat  $\frac{\delta G}{\delta \rho}_{N,T} = V$  en dus dat

$$\frac{\delta \mu}{\delta \rho}_{N,T} = \frac{V}{N} = \frac{1}{\rho}. \quad (8.5)$$

Omdat zoals gezegd  $\rho_1$  constant is vinden we uit vergelijking (7.3) door differentiatie naar de druk vergelijking (7.4).

4. Maak gebruik van vgl (7.4) en de plausibele aannamen dat i) de waterdamp zich als een ideaal gas gedraagt en ii) er geldt dat  $\rho_2 \ll \rho_1$  om te bewijzen dat vgl (7.1) inderdaad opgaat.

---

---

## 9. Sneller dan het licht

*M. Scholten, Universiteit Utrecht*

**8 punten**

---

In deze opgave geldt  $c = 1$ . Indien je  $c$  wel wilt blijven gebruiken leidt dit niet tot aftrek.

1. De limietsituatie vindt plaats als

$$\beta = \frac{1}{n} = \frac{1}{1.33} \quad (9.1)$$

Voor de kinetische energie  $K$  geldt:

$$K = E - Mc^2 = (\gamma - 1)Mc^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} - 1\right)Mc^2 \quad (9.2)$$

Voor het grensgeval geldt dus

$$K_{min} = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{1.33}^2}} - 1\right)Mc^2 = 0.517Mc^2 \quad (9.3)$$

Voor  $\alpha$ 's is de minimale energie ongeveer 1.96 GeV, een energie die niet met radioactief verval te behalen is. Voor  $\beta$ 's is die energie 0.264 MeV wat heel goed door radioactief verval te bereiken is. Het zijn dus de  $\beta$ 's die het licht veroorzaken.

2.

Er geldt:

$$p = \gamma\beta m \quad (9.4)$$

$$p = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (9.5)$$

$$\beta^2 m^2 = p^2 (1 - \beta^2) \quad (9.6)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{p^2}{p^2 + m^2}} \quad (9.7)$$

Invullen geeft  $\beta = 0.999902$

En dus  $1 + aP = 1.0000979$

$$P_{min} = \frac{0.0000979}{2.7 \times 10^{-4}} = 0.36 atm$$

3. Gebruik de substitutie

$$\cos \theta = \frac{1}{\beta n} = y \quad (9.8)$$

Dan geldt:

$$\frac{d\theta}{dp} = \left(\frac{d\theta}{dy}\right)\left(\frac{dy}{d\beta}\right)\left(\frac{d\beta}{dp}\right) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{n\beta^2} \frac{m^2}{(m^2 + p^2)^{3/2}} \quad (9.9)$$

Gebruik vergelijking 9.7 en 9.8 om dit te schrijven als:

$$\frac{d\theta}{dp} = \frac{\beta^2 m^2}{\tan \theta p^3} \quad (9.10)$$

Invullen van de gegeven waarden geeft:  $\theta = 3.051^\circ$ ,  $\beta = 0.9998$  en  $\frac{d\theta}{dp} = \frac{0.06143^\circ}{\text{GeV}}$   
Voor de dispersie valt op een eendere manier te vinden.

$$\frac{dn}{d\theta} = \frac{1}{n \tan \theta} \quad (9.11)$$

Hieruit volgt  $\delta\theta = 0.033^\circ$

Een redelijke schatting is dat de nauwkeurigheid voor het vaststellen van de positie ongeveer een kwart van de breedte van de ring is. Dan geldt:

$$\Delta p = \frac{0.033}{4 \times 0.06143} = 0.1 \text{ GeV} \quad (9.12)$$

---

## 10. Het Metropolis Algoritme

*K.N. Duerloo en K.K. Schakenraad, Stanford University en TU Eindhoven*

**13 punten**

---

**1-a.** Een rijtje met de laagste energie moet bestaan uit een alternerende sequentie van ladingen waarbij de hoogste positieve en negatieve ladingen zo dicht mogelijk bij elkaar staan. Om de som van de interactietermen zo negatief mogelijk te maken staan de grootste ladingen centraal op  $n = 0$  om vanaf daar alternerend af te bouwen. Bijvoorbeeld:

$$q[n] = \begin{cases} N & n = 0 \\ (N - n + 1)(-1)^n & 0 < n \leq N \\ (N + n)(-1)^n & -N \leq n < 0 \end{cases} \quad (10.1)$$

De energie van  $q[n]$  blijft onveranderd wanneer  $q[n] \leftarrow -q[n]$  en wanneer  $q[n] \leftarrow q[-n]$ . Dit geeft dus een multiplicititeit van 4 (vier).

**2.** Er is zeker meer dan één manier om  $Z$  numeriek te evalueren, de ene al wat efficiënter dan de andere. Het doel van deze vraag is niet om te optimaliseren, dus elk antwoord dat een redelijke schatting maakt van het aantal operaties ops  $\{Z\}$  wordt volledig juist gerekend. Voor een gegeven permutatie  $q[n]$  is dit een efficiënte formule die je kunt gebruiken in de berekening van  $Z$ :

$$\frac{-U_q}{k_B T} = \frac{-C}{k_B T} \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m>n} \frac{q[n]q[m]}{|m-n|} + \frac{DE}{k_B T} \sum_{n=-N}^{n=N} nq[n] \quad (10.2)$$

Beginnende met de Coulomb-interactieterm: ops  $\left\{ \frac{q[n]q[m]}{|m-n|} \right\} = 4$ .

Deze term wordt  $(2N + 1) \times N$  keer geëvalueerd en  $(2N + 1) \times N - 1$  keer opgeteld bij een lopende som:

$$\text{ops} \left\{ \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m>n} \frac{q[n]q[m]}{|m-n|} \right\} = 4(2N + 1) \times N + (2N + 1) \times N - 1 = 10N^2 + 5N - 1$$

Vermenigvuldigen met de factor  $\frac{-C}{k_B T}$  neemt 4 operaties in beslag:

$$\text{ops} \left\{ \frac{-C}{k_B T} \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m>n} \frac{q[n]q[m]}{|m-n|} \right\} = 10N^2 + 5N + 3$$

Wat de tweede term betreft:

$$\text{ops} \{nq[n]\} = 2$$

Dus na sommatie:



$$\text{ops} \left\{ \sum_{n=-N}^{n=N} nq[n] \right\} = 2 \times (2N + 1) + 2N = 6N + 2$$

En met voorfactor:

$$\begin{aligned} & \text{ops} \left\{ \frac{DE}{k_B T} \sum_{n=-N}^{n=N} nq[n] \right\} = 6N + 6 \\ \Rightarrow & \text{ops} \left\{ \frac{-C}{k_B T} \sum_{n=-N}^{+N} \sum_{m>n} \frac{q[n]q[m]}{|m-n|} + \frac{DE}{k_B T} \sum_{n=-N}^{n=N} nq[n] \right\} = 10N^2 + 11N + 10 \end{aligned}$$

Als we nu over alle permutaties gaan sommeren:

$$\begin{aligned} \text{ops} \left\{ \sum_{\text{alle permutaties}} \exp\left(\frac{-U_q}{k_B T}\right) \right\} &= (2N + 1)! \times (10N^2 + 11N + 26) + (2N + 1)! - 1 \\ \Rightarrow \text{ops} \{Z\} &= (2N + 1)! \times (10N^2 + 11N + 27) - 1 \end{aligned} \quad (10.3)$$

Dit getal is iets te groot om met je rekenmachine uit te rekenen. Als oplossing zou je bijvoorbeeld de Stirling benadering kunnen gebruiken en de  $-1$  laten vallen:

$$\ln(\text{ops} \{Z\}) \approx (2N + 1) \ln(2N + 1) - (2N + 1) + \ln(10N^2 + 11N + 27)$$

Dit geeft een berekeningstijd van ongeveer  $1.3 \times 10^{357}$  jaar. Het is dus duidelijk dat brute kracht de oplossing voor dit probleem niet gaat geven binnen redelijke tijd.

**3.** Als de simulatie voor grote  $K$  een evenwicht heeft bereikt, moet de kansverdeling van de verschillende toestanden dus constant zijn geworden in de *Monte Carlo tijd*  $K$ .

Aan deze voorwaarde is voldaan als alle netto kansdichtheidsstromen tussen twee toestanden A en B gelijk zijn aan 0. Dit kan wiskundig geformuleerd worden als:

$$P_A \times W(A \rightarrow B) = P_B \times W(B \rightarrow A)$$

Waarbij  $P_A$  en  $P_B$  de waarschijnlijkheden zijn om in respectievelijk toestand A of toestand B te zitten. De overgangkans  $W$  is het product van de *selectiekans*  $\alpha$  en de *acceptatiekans*  $\omega$ : Het is gemakkelijk in te zien dat  $\alpha(A \rightarrow B) = \alpha(B \rightarrow A)$ . Het evenwicht voor grote  $K$  houdt dus in dat:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\omega(B \rightarrow A)}{\omega(A \rightarrow B)}$$

Zeg nu dat toestand A een hogere energie heeft dan toestand B, dan geldt in evenwicht:

$$\frac{P_A}{P_B} = \frac{\exp\left(\frac{-U_A}{k_B T}\right)}{\exp\left(\frac{-U_B}{k_B T}\right)}$$

...wat consistent is met de Boltzmannverdeling.

**4-a.** Door steeds een even aantal inversies toe te passen kijk je effectief maar naar de helft van alle mogelijke permutaties. Er is namelijk een onderscheid tussen *even* en *oneven* permutaties. Zo kun je jezelf ervan overtuigen dat je enkel met een even aantal inversies van 123 naar 312 kunt gaan, en dat je enkel met een oneven aantal inversies van 123 naar 321 kunt gaan. Ook als je niet bekend bent met dit concept is het mogelijk om een  $\Phi$  te geven waarbij deze strategie een fout resultaat voor  $\langle \Phi \rangle$  geeft. Neem bijvoorbeeld:

$$\Phi = \begin{vmatrix} 1 & q[-N] & q[-N]^2 & \cdots & q[-N]^{2N} \\ 1 & q[-N+1] & q[-N+1]^2 & \cdots & q[-N+1]^{2N} \\ 1 & q[-N+2] & q[-N+2]^2 & \cdots & q[-N+2]^{2N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & q[N] & q[N]^2 & \cdots & q[N]^{2N} \end{vmatrix}$$

Eén inversie komt in deze determinant overeen met een rijwisseling. Een rijwisseling in een determinant doet niets meer dan het teken ervan omkeren:  $\Phi \leftarrow -\Phi$ . Als je bij elke stap een even aantal inversies gebruikt blijft  $\Phi$  vastzitten in één bepaald teken, en kom je nooit op het juiste antwoord:  $\langle \Phi \rangle = 0$ .

**4-b.** Gebruik een oneven aantal inversies bij het opstellen van  $q'[n]$ .

**5.** Entropie is een maat voor het aantal realiseringsmogelijkheden dat een systeem heeft voor een bepaalde totale energie. Toestanden die entropisch gunstig zijn (een hoge entropie hebben) hebben dus een hoge ontarding en een hoog aantal realiseringsmogelijkheden. Omdat steeds een willekeurige nieuwe toestand wordt geselecteerd, worden entropisch gunstige toestanden dus met een veel hogere waarschijnlijkheid gekozen dan toestanden met een lage entropie. Kortom, de selectiestap zorgt voor de entropie-overwegingen, en de acceptatiestap zorgt voor de energie-overwegingen.

---

## 11. Sterrenwind

*M. Scholten, Universiteit Utrecht*

**8 punten**

---

1. De wet van Bernoulli in differentiaalvorm is:

$$d\varepsilon = VdV + d\left[\frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho}\right] + \frac{GM_*}{r^2}dr = 0 \quad (11.1)$$

Met gebruik van de adiabatische gaswet kunnen we de tweede term herschrijven.

$$d\left[\frac{\gamma P}{(\gamma - 1)\rho}\right] = \frac{dP}{\rho} = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\frac{d\rho}{\rho} = C_s^2\frac{d\rho}{\rho} \quad (11.2)$$

Uit het feit dat de massa van de stroom niet meer toeneemt volgt

$$\rho(r)V(r)r^2 = \frac{\dot{M}}{4\pi} = \text{constant} \quad (11.3)$$

Hieruit volgt:

$$\frac{d\rho}{\rho} = -\frac{dV}{V} - 2\frac{dr}{r} \quad (11.4)$$

Combineren van bovenstaande vergelijkingen levert:

$$(V^2 - C_s^2)\frac{dV}{V} = \left(2C_s^2 - \frac{GM_*}{r}\right)\frac{dr}{r} \quad (11.5)$$

Dit kunnen we nog ietsjes anders schrijven tot

$$(V^2 - C_s^2)\frac{d\ln V}{d\ln r} = 2C_s^2 - \frac{GM_*}{r} \quad (11.6)$$

Dit is de vergelijking zoals de Amerikaanse astrofysicus Gene Parker hem opschreef.

2.

1. De rechterkant van de vergelijking verandert van teken voor grote  $r$ , met als gevolg dat voor grote  $r$  de stroom vertraagt, wat niet in overeenstemming is met onze waarneming.

2. Voor  $V = C_s$  wordt  $\frac{dV}{dr}$  oneindig, wat onfysisch is.

3. De oplossing is om beide situaties tegelijk te laten voorkomen. Zo komen er geen oneindige versnellingen en blijft er toch altijd een naar buiten gerichte versnelling. De overgang van subsonische naar supersonische snelheid gebeurt op de kritische straal  $r_c$  welke voldoet aan.

$$r_c = \frac{GM_*}{2C_{s,c}^2} \quad (11.7)$$

Voor het massaverlies op het kritische punt en dus in de hele ster geldt dus.

$$\dot{M} = 4\pi r_c^2 \rho_c C_{s,c} = \frac{\pi \rho_c (GM_*)^2}{C_{s,c}^3} \quad (11.8)$$

---

---

## 12. Bepaling van de gemiddelde grootte van poriën in een filter

A. H. Mooldijk, Universiteit Utrecht

12 punten

---

Een goed antwoord zou er als volgt uit kunnen zien:

1. Maak een serie metingen van  $h$  tegen  $t$ . Dit gebeurt door om de centimeter streepjes te zetten en de tijden klokken. Dit levert de volgende tabel op

$h(m)$	$t(s)$	$h^2(cm^2)$	$\log(h)$	$\log(t)$
0.01	3.17	0.0001	-2	0.501
0.02	12.02	0.0004	-1.699	1.080
0.03	30.87	0.0009	-1.523	1.490
0.04	58.74	0.0016	-1.380	1.769
0.05	99.84	0.0025	-1.301	1.999

Eventueel kun je nu eerst  $\log h$  uitzetten tegen  $\log t$ . Dit levert figuur 12.2 op. Indien het verband inderdaad geldig is, moet de richtingscoëfficiënt van 0.5 opleveren. Dit is inderdaad het geval.

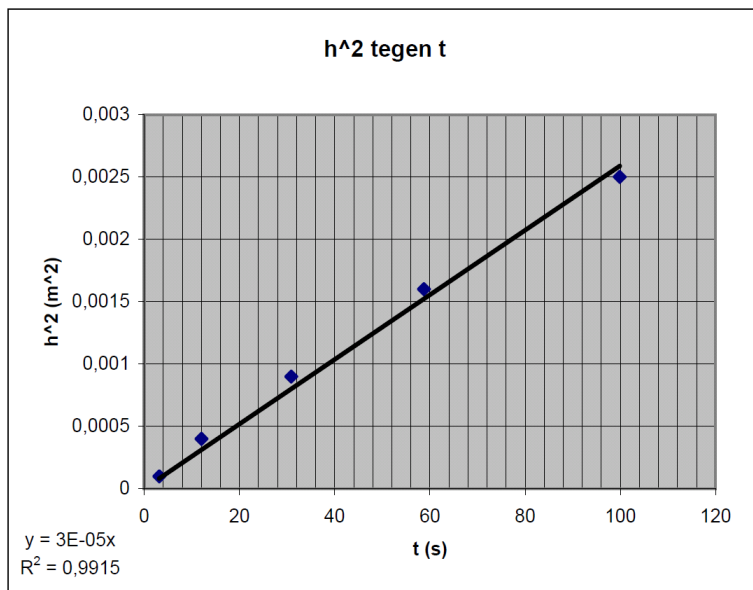


Figure 12.1

Nu kun je  $h^2$  uitzetten tegen  $t$ . Je krijgt dan zoiets als figuur 12.1.

Hieruit volgt  $c = 3 \times 10^{-5}$

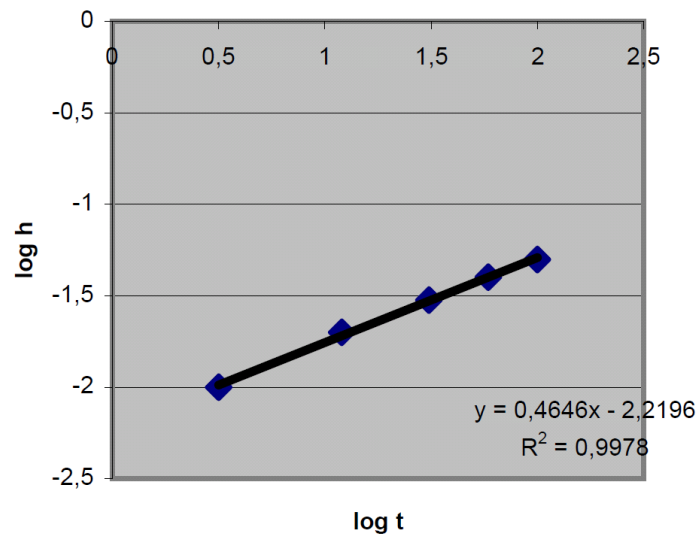


Figure 12.2

**2.** Maak vervolgens een serie metingen waarbij je steeds een verschillend stukje aluminiumfolie belast met punaises tot hij zinkt. Zet hierbij de kracht  $F$  uit tegen de omtrek  $l$ . De richtingscoëfficiënt van de fit hierdoor is gelijk aan de oppervlaktespanning  $\gamma$

**3.** Uit de gegeven formule valt af te leiden  $D = \frac{cn}{\gamma}$ .  $D$  volgt uit de gevonden waarden voor  $c$  en  $\gamma$ .